

Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), mayo-junio 2025,
Volumen 9, Número 3.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i1

EL EMPAQUETAMIENTO EN GRÁFICAS DE FICHAS COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA TEORÍA DE CÓDIGOS CORRECTORES DE ERRORES

THE PACKING OF TOKEN GRAPHS AS A TOOL FOR PROBLEM-SOLVING IN ERROR-CORRECTING CODE THEORY

Luis Manuel Ríos-Castro

Instituto Politécnico Nacional, México

Christophe Ndjatchi

Instituto Politécnico Nacional, UPIIZ, México

Teodoro Ibarra-Pérez

Instituto Politécnico Nacional, UPIIZ, México

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i3.17700

El Empaquetamiento en Gráficas de Fichas como una Herramienta para la Resolución de Problemas en la Teoría de Códigos Correctores de Errores

Luis Manuel Ríos-Castro¹lrisc@ipn.mx<https://orcid.org/0009-0008-9326-1854>

Instituto Politécnico Nacional

México

Christophe Ndjatchimndjatchi@ipn.mx<https://orcid.org/0000-0003-2702-9981>

Instituto Politécnico Nacional, UPIIZ

México

Teodoro Ibarra-Péreztibarrap@ipn.mx<https://orcid.org/0000-0001-5220-7001>

Instituto Politécnico Nacional, UPIIZ

México

RESUMEN

La teoría de grafos se aplica en muchas áreas de la ciencia, como la computación, la química, las biociencias, las redes, los sistemas de seguridad y la toma de decisiones en estudios de sistemas de potencia, convirtiéndose en una herramienta importante en múltiples campos. En este artículo de divulgación se presenta el estudio de un parámetro particular, conocido como el *número de empaquetamiento*, dentro de una familia especial de gráficas denominadas *grafos de fichas*, además se muestra cómo este permite abordar y contribuir a la resolución de problemas en la teoría de códigos correctores de errores.

Palabras clave: teoría de gráficas, gráficas de fichas, códigos correctores

¹ Autor principal.

Correspondencia: mndjatchi@ipn.mx

The Packing of Token Graphs as a Tool for Problem-Solving in Error-Correcting Code Theory

ABSTRACT

Graph theory is applied in many areas of science, such as computing, chemistry, biosciences, networks, security systems, and decision-making in power system studies, becoming an important tool in multiple fields. This expository article presents the study of a particular parameter, known as the packing number, within a special family of graphs called token graphs. Furthermore, it shows how this parameter allows us to address and contribute to the solution of problems in the error-correcting codes theory.

Keywords: graph theory, token graphs, error-correcting codes

Artículo recibido 07 abril 2025

Aceptado para publicación: 13 mayo 2025



INTRODUCCIÓN

La teoría de grafos (también conocida como la teoría de gráficas) nació en 1736 con la resolución por el matemático Leonhard Euler del problema de los siete puentes de Königsberg (Rusia). Desde entonces, esta teoría ha tenido muchas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia. Por ejemplo, en física, la teoría de gráficas ofrece un marco matemático riguroso para analizar la conectividad y las propiedades de transporte en materiales desordenados, donde la noción de caminos y clusters es fundamental (Stauffer & Aharony, 2018). En ingeniería, esta teoría ha proporcionado un lenguaje y un conjunto de herramientas para modelar y analizar las relaciones entre objetos, los cuales pueden ser de cualquier tipo, desde componentes en un circuito electrónico hasta nodos en una red de transporte (Sayeekumar et al. 2015), entre otras.

Con el aumento en la necesidad de transmisión y almacenamiento de información (datos) en las últimas décadas, es cada vez más imprescindible contar con métodos que ayuden a mantener no solamente la seguridad de estos datos sino también su confiabilidad (Castillo et al. 2025). Por ejemplo, al enviar una fotografía o un mensaje de texto a través de un dispositivo electrónico pueden surgir errores en la transmisión que distorsionen la imagen o el mensaje original. Para corregir dichos errores ocurridos durante la transmisión, surgió a mitad del siglo pasado la teoría de códigos correctores de errores, la cual ha sido impulsada por diferentes ramas de la ciencia como la computación y, desde luego, las matemáticas. Por ejemplo, el matemático Neil Sloane ha relacionado los códigos correctores con empaquetamiento de esferas y empaquetamiento en gráficas (Sloane, 2002).

De manera análoga al trabajo de Sloane (Sloane, 2002), en este artículo se explica de forma divulgativa, cómo con la determinación del número de empaquetamiento denotado por ρ , (es decir, con el hallazgo del tamaño máximo de un subconjunto de vértices en el que la distancia entre cualquier par de ellos es estrictamente mayor que 2) en las gráficas denominadas gráficas de fichas (o token graphs) denotadas por $F_k(G)$ (Fabila-Moroy et al., 2012), se puede corregir un error en un código binario. Es importante mencionar que este análisis se enfocará especialmente en el número de empaquetamiento de las gráficas de 3-fichas, denotada por $F_3(P_n)$, del grafo camino denotado por P_n (Ndjatchi et al. 2024).

La relevancia de estudiar el número de empaquetamiento en tales gráficas radica en su equivalencia con problemas de diseño de códigos binarios correctores de errores. En investigaciones previas, (Gómez et



al., 2018) demostraron que determinar el número de empaquetamiento, $\rho(F_2(P_n))$, de las gráficas de 2-fichas, $F_2(P_n)$, del grafo camino P_n , es equivalente a encontrar el tamaño máximo de un código binario de peso constante 2 que corrige una única transposición adyacente, el cual se encuentra en la sucesión A085680 de la The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) (Sloane, 2017).

En este contexto, el presente trabajo examina una conexión entre la teoría de gráficas y la teoría de códigos correctores de errores, a través del estudio de las llamadas gráficas de fichas y el concepto de *número de empaquetamiento*.

De forma más precisa, se explora la conexión entre la gráfica de 3-fichas, $F_3(P_n)$, del camino P_n , la determinación del número de empaquetamiento $\rho(F_3(P_n))$ y su relación con el problema de la determinación del máximo código corrector que puede corregir una única transposición adyacente. Cabe mencionar que la determinación del número de empaquetamiento $\rho(F_3(P_n))$ es esencial para diseñar códigos de tamaño máximo que protejan la integridad de la información ante este tipo específico de errores durante la transmisión o almacenamiento de esta.

METODOLOGÍA

Este artículo se enfoca en un análisis de tipo cualitativo, con un tipo de estudio descriptivo y aplicado en el área de teoría de gráficas. Su propósito es ilustrar de manera accesible una estructura matemática mediante una narrativa didáctica, induciendo el acercamiento intuitivo del lector a los conceptos de: gráfica, gráfica camino, de fichas y códigos correctores. El diseño adoptado es de tipo constructivo, el cual se centra en la exploración de conceptos a partir de ejemplos visuales y situaciones concretas que permiten construir significados matemáticos de manera progresiva.

Dado que se propone un estudio teórico sin aplicación directa a una población humana, no se realizó un muestreo estadístico ni se emplearon informantes. En cambio, la “población” considerada corresponde al conjunto de configuraciones representadas como subconjuntos de vértices de gráficas, tales configuraciones son llamadas *k*-conjuntos, estableciendo su relación con cadenas de códigos, seleccionando casos particulares para ilustrar las ideas principales.

Las técnicas de producción de datos consistieron en la generación y análisis de objetos matemáticos de la teoría de gráficas. Se utilizaron representaciones gráficas como recurso de visualización, permitiendo ilustrar los conceptos de: gráfica, configuración, movimiento de fichas, conexiones entre vértices y



códigos correctores. Estas representaciones cumplen la función de “instrumentos de apoyo” para facilitar la comprensión del contenido por parte del lector.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Un juego sobre gráficas

En el área de la teoría de gráficas, muchas estructuras aparentemente simples pueden dar lugar a ideas interesantes. Una de ellas surge al observar un juego intuitivo: imagine que se tiene un conjunto de puntos (llamados *vértices*, denotado por V) conectados por líneas (llamadas *aristas*, denotadas por E). Esta estructura, en matemáticas, se conoce como un *grafo* o *gráfica* y se representa como $G = (V, E)$. Ahora bien, sobre algunos de estos vértices se colocan fichas *indistinguibles*, siguiendo una regla sencilla: una ficha puede moverse de un vértice a otro si existe una arista que los conecta, y en todo momento cada vértice puede contener como máximo una ficha. Para entender mejor esta dinámica, considere una *gráfica camino* de n vértices, denotada por P_n , que se interpretará como una secuencia lineal de n vértices conectados consecutivamente, como si se tratara de las casillas de un tablero dispuesto en línea recta. Por ejemplo, si $n = 6$, tenemos la gráfica P_6



Suponga que se desea colocar una cantidad fija de k fichas indistinguibles en k de los n vértices del camino, con k menor o igual que n . Recuerde que la única restricción es que cada vértice puede contener como máximo una ficha.

Por ejemplo, si se consideran $k = 3$ fichas en el camino de $n = 6$ vértices, entonces se podría colocar dichas fichas inicialmente en los vértices $\{1, 2, 3\}$. Luego, podría mover la ficha del vértice 3 al vértice 4, obteniendo la nueva disposición $\{1, 2, 4\}$; si después mueve la ficha del vértice 2 al vértice 3, obtendrá la disposición $\{1, 3, 4\}$. Véase la Figura 1, gráficas (a), (b) y (c).

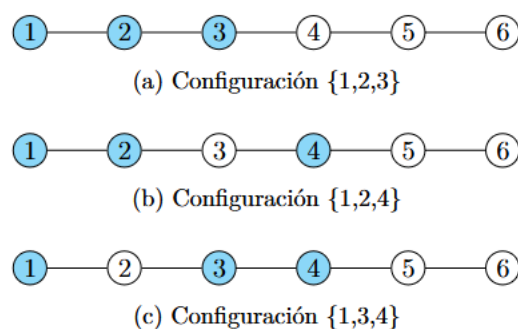


Figura 1: Ejemplos de configuraciones de 3 fichas en la gráfica camino P_6 de 6 vértices.

De esta manera, mediante este tipo de movimientos, se pueden generar múltiples disposiciones distintas de las 3 fichas sobre el camino. Cada una de estas disposiciones, en las que k vértices distintos están ocupados por las k fichas, se denomina una *configuración*. En este ejemplo, configuraciones como $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ y $\{1, 3, 4\}$ son algunas de las posibles con $k = 3$ fichas sobre 3 de los $n = 6$ vértices. En total, existen 20 configuraciones distintas, que corresponden a todas las maneras posibles de elegir 3 vértices de los 6 (es decir, el número combinatorio "6 sobre 3", $C(6,3)$). De manera general, se tienen en total $C(n, k)$ configuraciones distintas de k fichas en una gráfica G de n vértices.

Una nueva gráfica surge del juego

Una vez obtenidas todas las combinaciones posibles de k fichas colocadas en n vértices del camino (es decir, $C(n, k)$ configuraciones distintas), se construye una nueva gráfica de la siguiente manera: dos configuraciones, X y Y , estarán conectadas por una arista en esta nueva gráfica si es posible transformar una en la otra mediante el movimiento de una sola ficha a lo largo de una arista de la gráfica original P_n . Específicamente, se requiere que una ficha se desplace desde un vértice ocupado hacia un vértice adyacente que se encuentre libre de fichas.

Por ejemplo, en el caso del camino P_6 con 6 vértices (gráfica original), las configuraciones $X = \{1, 2, 4\}$ y $Y = \{1, 3, 4\}$ estarán conectadas en la nueva gráfica, ya que se puede obtener una a partir de la otra desplazando la ficha que se encuentra en el vértice 2 hacia el vértice 3, o viceversa, siendo estos vértices adyacentes en P_6 . De manera general, este proceso puede aplicarse a cualquier gráfica G , dando lugar a una nueva gráfica denominada *gráfica de k -fichas* de G , y que se denota como $F_k(G)$ (Fabila-Monroy et al., 2012). En esta nueva gráfica, los vértices representan todas las configuraciones posibles de k fichas en G , y existe una arista entre dos configuraciones si difieren únicamente en la posición de una sola

ficha, la cual se ha desplazado a lo largo de una arista de G . En el ejemplo anterior, el procedimiento genera la *gráfica de 3 fichas del camino P_6* , denotada como $F_3(P_6)$; véase la figura 2.

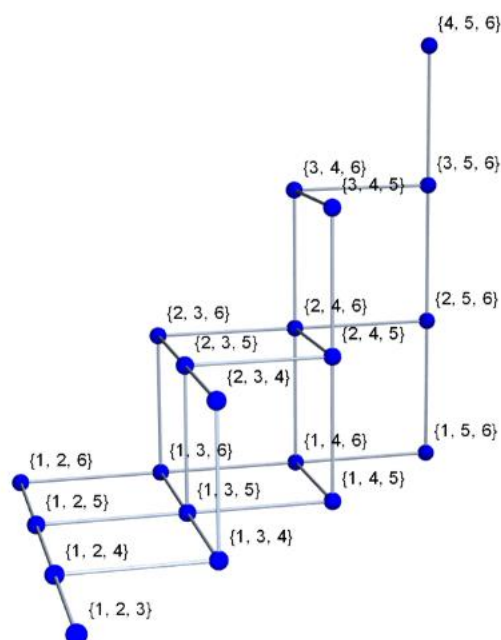


Figura 2: Gráfica de 3-fichas de la gráfica camino P_6 , $F_3(P_6)$.

Como se mencionó en la introducción, a lo largo de este artículo, se explorará una relación entre las gráficas de fichas $F_3(P_n)$ y el parámetro conocido como *empaquetamiento por vértices* y ciertos *códigos correctores de errores*.

Conjuntos de empaquetamiento por vértices en gráficas

En la sección anterior se introdujeron las *gráficas de fichas* $F_k(G)$, construidas a partir de una gráfica original o base G considerando las posibles configuraciones de k fichas colocadas en sus vértices. Estas gráficas tienen implícita la dinámica del movimiento de fichas sobre los vértices de G y permiten estudiar nuevas propiedades, por ejemplo, la distancia entre los vértices de un subconjunto de vértices de la nueva gráfica. Una de las preguntas naturales que surgen en este contexto es: *¿Cuántas configuraciones no se obtienen una de otra a partir de un solo movimiento de una ficha?*

Para responder esta pregunta, se empleará un concepto clásico en teoría de gráficas conocido como *conjunto de empaquetamiento por vértices*, o simplemente *conjunto de empaquetamiento*, también denominado *2-packing* en la literatura (Gómez et al., 2018). La idea central consiste en identificar subconjuntos de vértices cuyos elementos estén mutuamente separados por cierta distancia.

Formalmente, un subconjunto P de vértices de una gráfica G se denomina *conjunto de empaquetamiento por vértices* si, para cualesquiera dos vértices distintos en P , la distancia entre ellos en la gráfica G es estrictamente mayor que dos. Es decir, el camino más corto que los conecta debe tener al menos tres aristas. Este tipo de conjuntos tiene aplicaciones relevantes en áreas como la optimización, la codificación de información y el diseño de redes, donde es fundamental evitar interferencias cercanas entre nodos o elementos activos.

Respondiendo a la pregunta previa, un problema relacionado con estos conjuntos consiste en *determinar el tamaño máximo que pueden alcanzar dichos vértices*. Este valor se conoce como el *número de empaquetamiento* de la gráfica G , y se denota como $\rho(G)$. Calcular este número es, en general, una tarea no trivial, ya que depende de la estructura específica de la gráfica G , es decir, cómo están conectados los vértices en esta gráfica.

De ahora en adelante, con el objetivo de aclarar los conceptos y/o ideas mediante ejemplos específicos, se abordará el estudio de conjuntos de empaquetamiento de las gráficas de fichas $F_3(P_n)$. Al considerar estas gráficas, un conjunto de empaquetamiento adquiere una interpretación natural. Se trata de un subconjunto de configuraciones tales que, cualquier par de ellas están separadas por una distancia estrictamente mayor que dos, es decir, si X y Y son dos configuraciones en un conjunto de empaquetamiento, se necesitarán al menos tres movimientos de fichas necesarios para pasar de X a Y .

Por ejemplo, en el caso de la gráfica P_6 , un conjunto de empaquetamiento en la gráfica $F_3(P_6)$ está dado por:

$$P = \{\{1,2,3\}, \{1,2,6\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6\}\},$$

véase Figura 3. Para ilustrar que P cumple con la condición de empaquetamiento, se observa que pasar de la configuración $\{1,2,3\}$ a $\{1,2,6\}$ requiere tres movimientos consecutivos de la ficha ubicada en el vértice 3, es decir: $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. De la misma manera, para transformar $\{1,2,6\}$ en $\{2,3,4\}$, se deben ejecutar los siguientes pasos: primero, mover la ficha del vértice 2 al 3, obteniendo $\{1,3,6\}$; luego, mover la ficha del vértice 6 al 4, pasando por el vértice 5, lo que da $\{1,3,4\}$; finalmente, desplazar la ficha del vértice 1 al vértice 2, resultando en $\{2,3,4\}$. Como se puede ver, se realizaron más de dos movimientos para transformar $\{1,2,6\}$ en $\{2,3,4\}$. Haciendo un análisis exhaustivo, se puede verificar que cada transición entre pares de configuraciones del conjunto P implica al menos tres movimientos, cumpliendo

así con la condición requerida. Como el lector puede observar, el número mínimo de pasos para transformar una configuración en otra no siempre es único y puede variar dependiendo de la estructura de la gráfica original G .

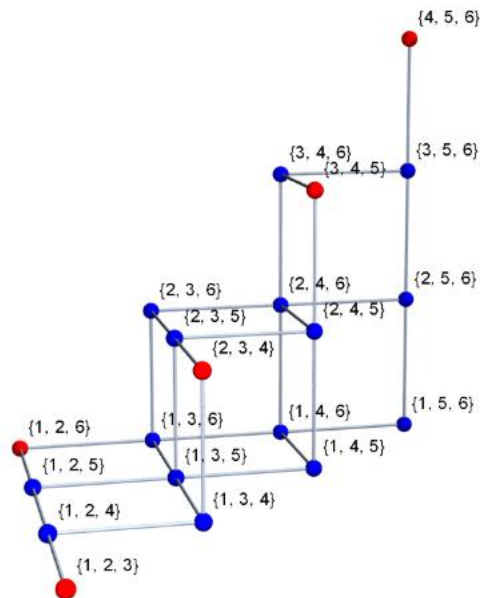


Figura 3: Gráfica $F_3(P_6)$. El conjunto $P = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ de vértices de color rojo es un conjunto de empaquetamiento.

Códigos correctores

Imagine que se tiene un mensaje secreto, en el que cada palabra está codificada con secuencias de ceros y unos. Estas secuencias tienen la misma longitud y conforman lo que en teoría de códigos se llama un *código binario*. Por ejemplo, las secuencias 1010, 0110 y 0001 son secuencias de un código binario de longitud 4, ya que contienen 4 dígitos. Dentro de esta colección de códigos, existe una familia especial, denotado por C , conocida como *código binario de peso constante w* . En C , el código binario que determina un mensaje dado tiene exactamente w número de unos, mientras que el resto de sus dígitos está ocupado por ceros. Así, por ejemplo, la secuencia 10110 tiene peso $w = 3$ porque contiene exactamente tres unos.

Ahora bien, ¿qué ocurre si, al transmitir el mensaje, se produce un error? Por ejemplo, tal vez dos bits adyacentes —un uno y un cero— intercambian sus posiciones. Este tipo de error se denomina *transposición adyacente*. Es decir, si transmitimos 10110 pero ocurre una transposición entre el segundo 1 y el 0 ubicado en la segunda posición, obtenemos 11010. En este caso, se requiere que el código sea

corrector. Un *código corrector* es aquel que está diseñado de manera que, si ocurre este tipo de error en un mensaje, es posible identificar de forma única cuál es el mensaje original. Por ejemplo, si un código contiene solo las secuencias $X = 10110$ y $Y = 01101$, y al enviar un mensaje se recibe la secuencia 11010, se puede deducir que el mensaje original tenía la secuencia $X = 10110$, porque una sola transposición adyacente no convierte $Y = 01101$ en 11010.

En este contexto, un *código binario corrector*, denotado por B , de peso $w=3$ es una colección de secuencias binarias de longitud fija $n \geq 3$, donde cada secuencia contiene exactamente tres unos, y que cumple la siguiente propiedad. Si algunas de las secuencias (o podrían ser todas) de cualquier mensaje de B tienen a lo más un error, es decir, a lo más una única transposición adyacente, entonces el resultado no podría haber sido producido por aplicar una transposición adyacente a otra secuencia del mismo conjunto B . Esta propiedad hace posible corregir ese error y recuperar el mensaje original. De acuerdo con lo anterior, si el conjunto $B = \{11100, 10101\}$, entonces B es un código corrector, ya que ninguna transposición adyacente en ambas secuencias coincide. Esto es, si el mensaje recibido con el error es el que le ocurrió a la cadena 11100, entonces en ningún momento 10101 pudo ser el mensaje original enviado. De esta manera, no se tienen ambigüedades sobre la secuencia original enviada. Esto permitiría corregir el error al recibir un mensaje.

Códigos correctores y gráficas de fichas

En seguida, se verá cómo se relaciona este tipo de códigos correctores con las gráficas de fichas $F_3(P_n)$. Por ejemplo, primero se analizará qué sucede en el caso $n = 5$ entre los vértices de la gráfica $F_3(P_5)$ y los códigos correctores de longitud $n = 5$ y peso $w = 3$.

Note que una configuración posible es posicionar 3 fichas en el conjunto de vértices $\{1, 3, 5\}$, tal configuración se puede representar como la secuencia binaria 10101, donde los unos indican la posición de cada ficha. Otra configuración posible, $\{2, 3, 4\}$, se representa como 01110. Así, cada configuración de fichas en P_n puede identificarse de manera única con una secuencia binaria de longitud n y peso 3.

Como previamente se vio, en la gráfica $F_3(P_n)$, los vértices son todas las configuraciones posibles de tres fichas en P_n , donde dos configuraciones están conectadas por una arista si se puede pasar de una a la otra moviendo una sola ficha a un vértice vecino vacío. En términos binarios, esta operación corresponde exactamente a una transposición adyacente entre un 1 y un 0. Por ejemplo, de la

configuración 10101, se pueden transponer los dígitos en las posiciones 1 y 2, es decir, el 1 y el 0 respectivamente, obteniendo 01101, que representa el movimiento de la ficha de la posición 1 a la 2 partiendo de la configuración $\{1,3,5\}$. Este procedimiento nos lleva a la construcción de una gráfica para modelar este tipo de códigos, denotada por Γ_n^3 (Ndjatchi et al. 2024), cuyos vértices son las secuencias binarias de longitud n y peso 3, donde la adyacencia se define por una única transposición adyacente, véase Figura 4, b).

Por ejemplo, las secuencias 10110 y 11010 son adyacentes en Γ_5^3 , así como sus configuraciones correspondientes $\{1, 3, 4\}$ y $\{1, 2, 4\}$ lo son en $F_3(P_5)$, véase Figura 4, a) y b). De acuerdo con este análisis, se puede ver que las gráficas $F_3(P_n)$ y Γ_n^3 tienen la misma estructura; en matemáticas, esta propiedad se resume en que tales gráficas son isomorfas, lo cual se denota matemáticamente como $F_3(P_n) \cong \Gamma_n^3$, de hecho, de manera general se cumple que $F_k(P_n) \cong \Gamma_n^k$ para $1 < k < n$ (Ndjatchi et al. 2024).

Una herramienta para construir códigos correctores es emplear las gráficas de fichas y analizar sus conjuntos de empaquetamiento, que, como ya vimos anteriormente, consisten en un subconjunto de vértices tales que la distancia (número mínimo de aristas) entre cualquier par de ellos es mayor que dos. En este caso, eso significa que, si se eligen las secuencias 10011 y 01101 en la gráfica Γ_n^3 , al menos tres transposiciones adyacentes son necesarias para pasar de una a la otra, por lo que pueden estar en un conjunto de empaquetamiento de la gráfica Γ_n^3 .

Debido al isomorfismo entre $F_3(P_n)$ y Γ_n^3 , un conjunto de empaquetamiento en $F_3(P_n)$ equivale a un conjunto de secuencias binarias de peso 3 en el que la distancia mínima entre cualquier par es mayor que dos, lo que corresponde exactamente a un código binario de peso 3 capaz de corregir una única transposición adyacente.

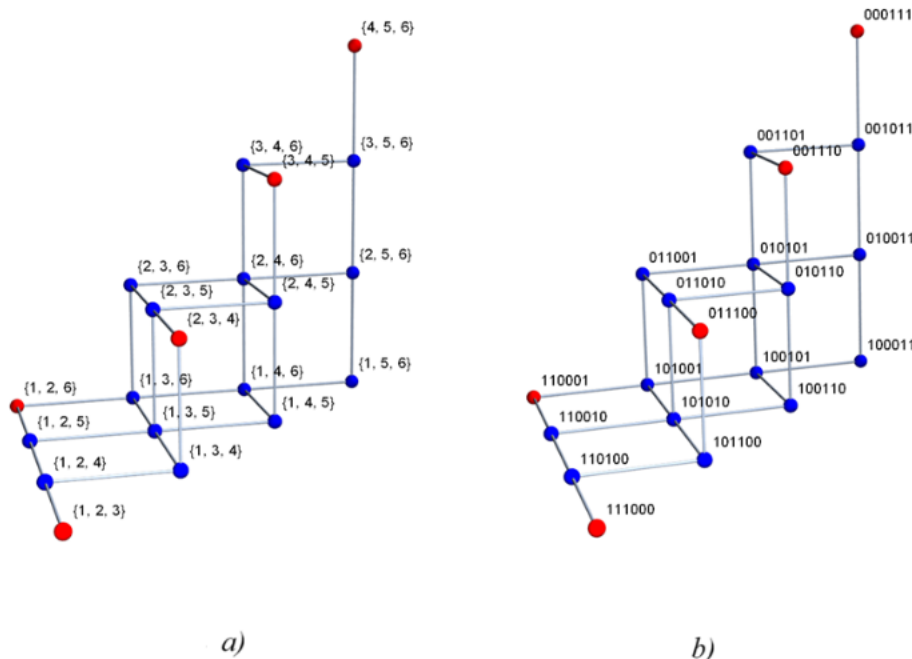


Figura 4: a) Gráfica $F_3(P_6)$ con conjunto de empaquetamiento $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$. b) gráfica Γ_n^3 con código corrector $\{111000, 110001, 011100, 001110, 000111\}$. Ambas gráficas tienen la misma estructura, es decir son isomorfas, $F_3(P_6) \cong \Gamma_n^3$

El problema de determinar el número de empaquetamiento en $F_3(P_n)$

En la sección anterior, se vio que estudiar códigos binarios capaces de corregir errores por transposición adyacente equivale a estudiar conjuntos de empaquetamiento en las gráficas de fichas $F_3(P_n)$. Esta conexión, que se establece a través del isomorfismo con las gráficas Γ_n^3 , permite abordar un problema en teoría de códigos mediante herramientas de la teoría de gráficas. De esta manera, determinar conjuntos de empaquetamiento en $F_3(P_n)$ no sólo es una cuestión combinatoria, sino que tiene implicaciones directas en la construcción de códigos correctores de mayor tamaño.

Sin embargo, determinar el número de empaquetamiento $\rho(F_k(P_n))$ (o equivalentemente $\rho(\Gamma_n^k)$) es un problema que, desde el punto de vista teórico y computacional, resulta ser altamente complejo. Este problema es tan difícil como determinar el tamaño máximo de un conjunto independiente de vértices (es decir, un subconjunto de vértices en el que cada par no son adyacentes entre sí) en una gráfica arbitraria, un problema conocido por pertenecer a la clase de problemas NP-duros (Garey, 1979).

A pesar de esta dificultad, se han obtenido avances concretos en el caso específico de $k = 3$, lo cual corresponde a configuraciones de tres fichas en P_n , o secuencias binarias de peso tres. En particular, se

ha determinado el valor exacto de $\rho(F_3(P_n))$ para valores de n pequeños mediante algoritmos específicos que exploran de forma exhaustiva el espacio de soluciones posibles (Ndjatchi et al. 2024). Esto es $1 \leq \rho(F_3(P_n)) \leq 41$ para $3 \leq n \leq 12$. Para valores mayores de n , en el rango $13 \leq n \leq 32$, se han diseñado algoritmos constructivos que permiten obtener conjuntos de empaquetamiento lo más grandes posibles. Estos conjuntos de empaquetamiento proporcionan cotas inferiores para el valor de $\rho(F_3(P_n))$. Por ejemplo, para los valores de $n=13$ y $n=32$ se tienen las siguientes cotas inferiores $\rho(F_3(P_{13})) > 49$ y $\rho(F_3(P_{32})) > 278$ respectivamente. Estos resultados, tanto exactos como aproximados, no sólo enriquecen la comprensión y estudio de las gráficas de fichas y sus códigos asociados, sino que también aportan herramientas útiles para entender mejor este tipo de gráficas. A pesar de que el problema general permanece como un desafío abierto por su complejidad intrínseca, las soluciones obtenidas para valores específicos de n constituyen un avance parcial dentro del ámbito de los códigos correctores de errores.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado que el estudio de las gráficas de fichas $F_3(P_n)$ proporciona un enfoque para abordar problemas en teoría de códigos correctores. La conexión se establece a través del isomorfismo $F_3(P_n) \cong \Gamma_n^3$, el cuál muestra una relación entre las gráficas de fichas y códigos capaces de corregir transposiciones adyacentes, permitiendo reinterpretar problemas de diseño de códigos en términos combinatorios.

Los resultados reportados en la literatura para el número de empaquetamiento de la gráfica de fichas $F_3(P_n)$ muestran un comportamiento no regular en los rangos de n analizados. Para valores pequeños ($n \leq 12$), se tienen los valores exactos obtenidos mediante métodos exhaustivos, mientras que para rangos mayores ($13 \leq n \leq 32$) se han establecido cotas inferiores mediante técnicas constructivas. Mediante el enfoque metodológico se evidencian las limitaciones impuestas por la NP-dureza del problema, por otro lado, se destaca la importancia de los enfoques heurísticos para obtener soluciones aproximadas.

El estudio realizado sugiere tres direcciones para investigación futura:

La de terminación de $\rho(F_k(P_n))$ y su relación con códigos correctores de peso constante $k > 3$.

La determinación exacta de $\rho(F_k(P_n))$ para $n > 12$.

La búsqueda de patrones combinatorios que permitan predecir comportamientos sin recurrir a cálculos exhaustivos, y

El estudio de otras familias de gráficas base, como ciclos C_n y su relación con códigos correctores.

Estas líneas de trabajo podrían conducir a avances tanto en teoría de gráficas como en sus aplicaciones a sistemas de codificación. La relación entre estas áreas muestra un desarrollo de herramientas teóricas y aplicadas en el diseño de códigos correctores de errores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Alavi, S. H. (2015). A generalisation of Johnson graphs with an application to triple factorisations. *Discrete Mathematics*, 338(11), 2026-2036.
2. Alavi, Y., Behzad, M., & Simpson, J. E. (1991). Planarity of double vertex graphs. In Y. Alavi et al. (Eds.), *Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications* (pp. 472-485). SIAM.
3. Alavi, Y., Behzad, M., Erdős, P., & Lick, D. R. (1991). Double vertex graphs. *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences*, 16(1), 37-50.
4. Alavi, Y., Lick, D. R., & Liu, J. (2002). Survey of double vertex graphs. *Graphs and Combinatorics*, 18(4), 709-715.
5. Alzaga, A., Iglesias, R., & Pignol, R. (2010). Spectra of symmetric powers of graphs and the Weisfeiler-Lehman refinements. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100(6), 671-682.
6. Audenaert, K., Godsil, C., Royle, G., & Rudolph, T. (2007). Symmetric squares of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 97(1), 74-90.
7. Castillo, J. H., López Santander, J. J., & Ruiz, H. M. (2025). *Introducción a la teoría de códigos correctores de errores*. ISBN: 978-628-7771-20-8.
8. de Alba, H., Carballosa, W., Leaños, J., & Rivera, L. M. (2016). Independence and matching numbers of some token graphs. *arXiv:1606.06370v2*.
9. Fabila-Monroy, R., Flores-Peñaloza, D., Huemer, C., Hurtado, F., Urrutia, J., & Wood, D. R. (2012). Token graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28(3), 365-380. [https://doi.org/\[falta DOI\]](https://doi.org/[falta DOI])
10. Fisher, D. C. (1993). The 2-packing number of complete grid graphs. *Ars Combinatoria*, 30(1), 261-270.
11. Garey, M. R. (1979). *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman.
12. Gómez, J. M., Leaños, J., Ríos-Castro, L. M., & Rivera, L. M. (2018). The packing number of



the double vertex graph of the path graph. *Discrete Applied Mathematics*, 247, 327-340.

[https://doi.org/\[falta DOI\]](https://doi.org/[falta DOI])

13. Hill, R. (1986). *A first course in coding theory*. Oxford University Press.
14. Johnson, S. M. (1962). A new upper bound for error-correcting codes. *IRE Transactions on Information Theory*, 8(3), 203-207.
15. Lin, S., & Costello, D. J. (2004). *Error control coding: Fundamentals and applications* (2nd ed.). Prentice Hall.
16. MacWilliams, F. J., & Sloane, N. J. A. (1977). *The theory of error-correcting codes*. North-Holland.
17. Ndjatchi, C., Escareño Fernández, J. A., Ríos-Castro, L. M., Ibarra-Pérez, T., Correa-Aguado, H. C., & Pineda Martínez, H. (2024). On the packing number of 3-token graph of the path graph P_n . *AIMS Mathematics*, 9(5), 11644-11659. <https://doi.org/10.3934/math.2024571>
18. Rivera, L. M., & Trujillo-Negrete, A. L. (in press). Hamiltonicity of token graphs of fan graphs. *Art Discrete Applied Mathematics*.
19. Sayeekumar, N., A. K., S., Karthikeyan, S. P., Sahoo, S. K., & Raglend, I. J. (2015). Graph theory and its applications in power systems - A review. In *2015 International Conference on Control, Instrumentation, Communication and Computational Technologies (ICCICCT)* (pp. 154-157). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICCICCT.2015.7475267>
20. Sloane, N. J. A. (2002). On single-deletion-correcting codes. *arXiv:math/0207197*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0207197>
21. Sloane, N. J. A. (2017). *The on-line encyclopedia of integer sequences*. <https://oeis.org>
22. Stauffer, D., & Aharony, A. (2018). *Introduction to percolation theory* (2nd ed.). CRC Press.

