Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), noviembre-diciembre 2026,
Volumen 10, Número 6.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i6

UNA EXPLORACIÓN EN EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE FRACCIONES PARCIALES EN ALUMNOS DE INGENIERÍA

AN EXPLORATION OF THE PARTIAL-FRACTIONS INTEGRATION METHOD AMONG ENGINEERING STUDENTS

Ramón Berber Palafox
Instituto Tecnológico de Toluca.

María Guadalupe Reyes Cruz
Instituto Tecnológico de Toluca.

Alma Patricia Vásquez González
Instituto Tecnológico de Toluca.

Norma Rubí Baca
Instituto Tecnológico de Toluca.

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i6.26983

Una Exploración en el Método de Integración de Fracciones Parciales en Alumnos de Ingeniería

Ramón Berber Palafox [1]
rberberp@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0000-8701-1359
Profesor adscrito al departamento de ciencias básicas
del Tecnológico Nacional de México,
Instituto Tecnológico de Toluca.

María Guadalupe Reyes Cruz
maría.rc@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-3093-8182
Profesor adscrito al departamento de ciencias básicas
del Tecnológico Nacional de México,
Instituto Tecnológico de Toluca.

Alma Patricia Vásquez González
avasquezg@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0002-2273-2950
Profesor adscrito al departamento de sistemas y computación
del Tecnológico Nacional de México,
Instituto Tecnológico de Toluca.

Norma Rubí Baca
nrubib@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0000-2455-900X
Profesor adscrito al departamento de ingeniería industrial
del Tecnológico Nacional de México,
Instituto Tecnológico de Toluca.

RESUMEN

En el segundo semestre, en las carreras de ingeniería, del Tecnológico Nacional de México se imparte la asignatura Cálculo Integral, en la cual se ha observado en los estudiantes que el tema de integración de funciones racionales se dificulta de manera importante, esto debido a la necesidad de la descomposición de la función racional del integrando en fracciones parciales simples, lo cual frecuentemente involucra procedimientos operativos muy laboriosos. Para reducir esta dificultad, en este trabajo se presenta un procedimiento alternativo para la descomposición de la función racional que tienen factores lineales repetidos en el denominador de una forma más entendible. Durante la impartición de las clases de esta materia, específicamente en el tema de integración de funciones racionales, se hace necesario la descomposición de la función racional del integrando en fracciones parciales simples, lo cual frecuentemente involucra procedimientos operativos muy laboriosos. Además de utilizar la descomposición de fracciones parciales en la integración, también se utiliza este método en la solución de series telescópicas o colapsante y en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de la Transformada Inversa de Laplace.

Palabras clave: función racional, fracciones parciales, factores lineales.

[1] Autor principal
Correspondencia: rberberp@toluca.tecnm.mx

An Exploration of the Partial-Fractions Integration Method Among Engineering Students

ABSTRACT

In the second semester of engineering programs at the Tecnológico Nacional de México, the subject of Integral Calculus is taught. It has been observed that students struggle significantly with the integration of rational functions, primarily due to the need to decompose the rational function in the integrand into simple partial fractions, which often involves very laborious operational procedures. To reduce this difficulty, this paper presents an alternative procedure for the decomposition of rational functions that have repeated linear factors in the denominator in a more comprehensible manner. During the teaching of this subject, specifically in the topic of integrating rational functions, it is necessary to decompose the rational function in the integrand into simple partial fractions, which frequently involves very laborious operational procedures. In addition to using partial fraction decomposition in integration, this method is also applied in solving telescoping series and in solving ordinary differential equations using the Inverse Laplace Transform method.

Keywords: partial fractions; Heaviside; integration; Laplace transform.

Artículo recibido 10 noviembre 2026

Aceptado para publicación: 17 noviembre 2026

INTRODUCCIÓN

Los métodos de integración que se estudian generalmente en un curso de cálculo integral en las carreras de ingeniería son: integración por cambio de variable, integración por partes, integración de funciones trigonométricas, integración por sustitución trigonométrica e integración por fracciones parciales. Por otro lado, cuando estudiamos la materia de ecuaciones diferenciales, uno de los temas a tratar es la transformada inversa de Laplace, donde, nuevamente encontramos la descomposición en fracciones parciales como uno de los métodos que resultan de gran ayuda.

El método de integración por fracciones parciales se aplica a integrales cuyo integrando es una función racional propia y el primer paso para la aplicación de este método consiste en descomponer la función racional antes mencionada en una suma de funciones racionales más simples, de manera que se facilite su integración.

Para esta descomposición existen los métodos siguientes: Método de números amigos, algebraico y de Heaviside.

Planteamiento del problema

En las carreras de ingeniería impartidas en el Tecnológico Nacional de México se cursa la materia de cálculo integral en el segundo semestre, los métodos de integración que se abordan en la materia son de suma importancia para futuras materias como cálculo vectorial o ecuaciones diferenciales. Dentro de los métodos de integración, el tema de fracciones parciales representa un conflicto debido al desarrollo algebraico que debe realizarse ya sea polinomial o lineal.

Entre la problemática que presentan el método de integración por fracciones parciales se encuentra la falta de criterio para poder discernir si es necesario utilizar este método o simplemente se puede realizar una sustitución o una operación algebraica para obtener la solución, esto produce que utilicen este método de integración de forma mecánica sin un análisis y comprensión previa, por tanto, la cantidad de alumnos que aprueban la materia disminuye drásticamente por esta situación.

Dentro de las complicaciones que presentan los alumnos cuando resuelven ejercicios pueden considerarse cuatro fases o partes.

La primera corresponde a la identificación del método de integración, esto se debe a que en ocasiones no requieren utilizar integrales por fracciones parciales, únicamente se requiere una sustitución o división polinomial.

La segunda dificultad surge al plantear los numeradores de las fracciones parciales, surge cuando no se identifica los numeradores a elegir de una ecuación lineal o cuadrática, por tanto, no se distingue si requieren una constante A o algún grado más Bx+C.

La tercera es los métodos de resolución de ecuaciones lineales o cuadráticas, esto se debe a la parte algebraica, en ocasiones la falta de desarrollo algebraico afecta el resultado de los valores obtenidos, produciendo así resultados erróneos en los numeradores de las integrales.

La cuarta parte surge cuando una vez realizado todo el proceso algebraico y obtenido los valores de los numeradores, la dificultad en reconocer si se debe integrar como un logaritmo natural o como una función trigonométrica inversa, lo cual nuevamente conlleva a resultados finales equivocados.

Debido a las razones expuestas con anterioridad, el presente trabajo plantea la interrogante de conocer cuáles son los errores que presentan los alumnos cuando resuelven integrales por fracciones parciales, si son conceptuales, algebraicos o ambos y a su vez, conocer cómo afectará esto en su desempeño en la materia de cálculo integral, en particular en el tema de métodos de integración.

Justificación

El cálculo integral representa una de las materias base para el desarrollo de materiales subsecuentes, en primera instancia las materias de cálculo vectorial y de ecuaciones diferenciales, por otro lado, dependiendo de la ingeniería, las materias con diversas aplicaciones requieren aplicar diversos métodos de integración para obtener el resultado del problema, ya sea aplicaciones físicas, de optimización de procesos o para el desarrollo de sistemas más complejos.

Sin embargo, el número de estudiantes que aprueban la materia se encuentra en la media o incluso menos que la media de alumnos, por otro lado, los estudiantes que continuamente no aprueban la materia son aquellos que serán dados de baja o desertarán ya sea de la materia o de la misma institución, por ello la cantidad de alumnos que deja de pertenecer a una institución educativa por estas materias de ciencias básicas, es mucho mayor, comparada con otras materias, por tanto es un gran desafío promover el desarrollo de diversas capacidades operativas en los alumnos.

El conocimiento sobre las dificultades que presentan los alumnos cuando resuelven ejercicios de métodos de integración y en particular sobre integrales por fracciones parciales busca mejorar el rendimiento académico de los estudiantes y también disminuir la cantidad de deserción escolar.

Con respecto a la percepción sobre el índice de aprobación tan bajo, posiblemente se asumiría que los estudiantes que no aprueban es porque no saben cálculo integral, sin embargo, no necesariamente es correcta esta perspectiva, posiblemente el no aprobar la materia se encuentra relacionado con la falta de habilidades algebraicas los cuales son parte de un conocimiento previo.

La intención del instrumento diagnóstico con los ejercicios de control, pretende realizar una evaluación cualitativa que sea aplicable a otros docentes que se encuentren laborando en los Institutos Tecnológicos, de esta forma, la información proporcionada servirá para robustecer el conocimiento sobre los huecos de conocimiento de álgebra.

Objetivos

Objetivo general

Conocer y analizar los errores comunes, ya sea algebraicos o del cálculo mismo que presentan los estudiantes de la materia de cálculo integral, en particular en el tema de fracciones parciales, por medio de una evaluación diagnóstica.

Objetivos específicos

Identificar si los estudiantes saben discernir entre el método de integración elegir

Agrupar los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes en el proceso de integración.

Evaluar la habilidad en el desarrollo algebraico de los estudiantes con respecto a la solución del sistema de ecuaciones.

Determinar si una vez obtenidos los factores de los denominadores, la integral es resuelta correctamente.

Marco teórico

De manera general consideramos que las operaciones matemáticas inversas son más complicadas que las operaciones directas: restar números es más complicado que sumar, dividir números es más complicado que multiplicar, calcular raíz cuadrada de un número es más complicado que elevar al cuadrado y calcular la integral de una función es más complicado que calcular derivadas. Las operaciones con números las podemos trasladar a operaciones algebraicas y el nivel de dificultad se mantiene. En este nivel de dificultad ubicamos la descomposición de fracciones parciales como la operación inversa a sumar fracciones.

Barrera y Sandoval (s.f., p. 1) menciona que estudios recientes (NCTM, 2000), sugieren que las propuestas curriculares para los diferentes niveles básicos de instrucción se elaboren tomando en cuenta una presentación estructurada ascendente de los temas a discutir. Así mismo, se enfatiza la conexión que debe existir entre los contenidos y procesos del quehacer matemático en el aula. Por otro lado, se ha establecido la importancia que tiene la transferencia entre diferentes representaciones de un concepto durante el proceso de aprendizaje (Duval, 1999a, 1999b). Esto es aplicable a la representación de un problema y su inverso. Por otro lado, desde el punto de vista matemático se tiene que los problemas inversos permiten lograr una comprensión más profunda de los procesos y contenidos matemáticos involucrados en su solución.

Realizamos un recorrido de las dificultades encontradas en el estudio de las fracciones, iniciando con la educación básica, en la escuela primaria, por ejemplo, Resnick (2018, p.11) en un estudio sobre la comprensión del concepto de fracción, de 4º a 6º grado, Rinne et al. (2017) encontraron una progresión de desarrollo, en estudiantes que tenían baja, regular y buena comprensión del tema. En el presente estudio, la posesión de una comprensión regular de magnitudes decimales y fracciones fue relacionado positivamente a la subsecuente adquisición de un buen entendimiento de fracciones. Estos hallazgos paralelos sugieren que, para decimales y fracciones, la habilidad de reconocer que la relación cuantitativa entre dígitos particulares puede constituir un importante conocimiento.

Es importante mencionar que si deseamos obtener buenos resultados en la descomposición de fracciones parciales debemos comenzar con un buen manejo de las operaciones básicas de las fracciones, las cuales se estudian en el nivel de educación básico, como se menciona en Stelzer (2016,

p.15), dentro de los contenidos curriculares de la educación primaria, los números fraccionarios -y con ellos las operaciones- son de particular importancia. Por una parte, teorías recientes del desarrollo numérico (Siegler, Thompson & Schneider, 2011) indican que el aprendizaje de las fracciones propicia una comprensión más profunda y madura del sistema numérico. Esto se debería a que la enseñanza de las fracciones introduce una serie de propiedades no aplicables a los números naturales. Por ejemplo, a diferencia de los números naturales, la numerosidad de una fracción puede ser representada a través de otros números fraccionarios. Tal ampliación del conocimiento numérico impulsaría a los niños a reformular y a madurar su conocimiento conceptual de los números. Por otra parte, el conocimiento de las fracciones durante la educación primaria predice la adquisición del conocimiento del álgebra y del aprendizaje general de la matemática durante la secundaria (Siegler et al., 2012).

Cortina et al (2013, p. 8). La siguiente cita de Davis, Hunting y Pearn (1993) expresa bien el ánimo de esta insatisfacción: “La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones no sólo es muy difícil; en el esquema más amplio de las cosas, es un triste fracaso” (p. 63). Para respaldar esta afirmación, los autores se refirieron a los resultados obtenidos por Hart en un estudio realizado en Inglaterra y publicado en 1981, en el que se evaluaron los conocimientos matemáticos de un amplio número de estudiantes de entre 11 y 16 años de edad. Al paso del tiempo, la situación no ha cambiado mucho; por ejemplo, Bills (2003) replicó parte del estudio de Hart y encontró que, 20 años después, los adolescentes británicos tenían confusiones muy similares sobre el significado de las fracciones. Resultados obtenidos en otras partes del mundo muestran un panorama análogo; por ejemplo, Hannula (2003), en un estudio que implicó la aplicación de 1,154 pruebas a estudiantes finlandeses de quinto grado, encontró que 46% de ellos no fueron capaces de sombrear correctamente 3/4 de una barra dividida en ocho partes iguales.

Mousley y Kurz (2015, p.44) Investigaciones de Siegler, R. S., Thompson, C.A., & Schneider, M (2011) muestran que “conocimientos tempranos en fracciones y saber dividir son absolutamente cruciales para el posterior aprendizaje de matemáticas avanzadas, pero no tenían ninguna evidencia hasta ese momento”. Adicionalmente, “conocimiento de las fracciones es un tema central para aprendizaje posterior de matemáticas, y conocimiento temprano de las fracciones es altamente predictivo de mayor aprovechamiento de matemáticas posterior” (Bailey, D. H., et al, 2014). Dado que tener una

comprensión básica de fracciones es un punto muy importante en el aprendizaje de matemáticas, parece prudente revisitar el tema y hacer algunas recomendaciones para su mejora.

Según Ríos (2001, como se citó en Ríos García, Yaneth, 2007, p. 126) "analizando algunos informes de ciertos historiadores matemáticos, hay un acuerdo en el hecho de que las fracciones aparecen en la resolución de problemas sobre repartos en Egipto (1650 A.C.), por lo que pareciera que las fracciones surgen en el contexto de la resolución de problemas y no conciben la fracción como número, sino que a/b representaba la cantidad que le tocaba a una persona, entre un conjunto de b personas, al dividir a panes. Por otro lado, para agilizar los cálculos tenían tablas que transformaban las fracciones como *suma de otras*." Resulta interesante notar que esto *suena parecido a fracciones parciales*.

Por otra parte, Ruiz et al (2016, p. 351), consideran que **"**En ingeniería no solo es necesario solucionar las ecuaciones diferenciales que modelan problemas ingenieriles, también es importante el método empleado para su resolución (Camarena, 2001). Tal es el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que modelan circuitos eléctricos, cuya herramienta de solución en las ingenierías eléctrica y electrónica es la transformada de Laplace, la cual permite establecer la función de transferencia para analizar el circuito (Suárez y Camarena, 2000). Para su conceptualización y manejo operacional, esta herramienta requiere de conceptos y procesos matemáticos previos, denominados prerrequisitos, donde generalmente los estudiantes tienen problemas cognitivos. Ejemplos de estos prerrequisitos son los conceptos de integrales impropias con límites de integración infinitos, integrales propias, métodos de integración, propiedades operacionales básicas con límites de una variable, descomposición de una función racional en fracciones parciales, sistemas de ecuaciones lineales."

Martínez et al (2011, p.192) En el caso de series, la forma cerrada de una serie, o sea, una fórmula para la enésima suma parcial, sólo se puede hallar fácilmente en algunas situaciones especiales, como en el caso de series geométricas o en casos en que podemos usar fracciones parciales para expresar la enésima suma como una suma telescópica.

Conde et al (2016, p. 3) Estos estudios nos permiten afirmar que la música está ligada al aprendizaje cognitivo, en particular en el ámbito de la lógica, el razonamiento espacial, y el razonamiento abstracto. Además, nos permite ahondar en el espacio-temporal y su vínculo con los números fraccionarios en el

sentido Rauscher y Zupan (2000), quienes afirman que la enseñanza musical mejora el razonamiento proporcional en relación con ciertos conceptos matemáticos, como la comprensión de las fracciones.

En Castro et al (2017, p.2) se da un método alternativo a las fracciones parciales para casos como la integral

$$\int \frac{dP}{P(M-P)}$$

Friz et al (2008, p. 89), En el nivel superior, el concepto de fracción representada como tasas de cambios, tiene extrema importancia, pues es el concepto previo para trabajar con derivadas e introducirnos en la complejidad infinitesimal. Uno de los orígenes de donde surge este concepto es el de la velocidad instantánea, nuevamente una aplicación del concepto de fracción.

La fracción como solución de ecuaciones algebraicas. En el desarrollo de la resolución de la ecuación

$$mx = n, \quad con\ m, n\ en\ Z, n \neq 0$$

Se origina la fracción,

$$\frac{n}{m}, \ como\ el\ cociente\ entre\ n\ y\ m.$$

Para resolver fracciones parciales Diáz (2017, p.1-2) comenta: “El método de coeficientes indeterminados (MCI), es tedioso (Huang, 1991) y una fuente de complicadas identidades algebraicas (Chrystal, 1961) que confunden a los estudiantes de un primer curso de cálculo integral, sobre todo a aquellos con problemas de conocimientos algebraicos”.

Una revisión del tema de Integración por fracciones parciales en los textos de cálculo utilizados en las universidades como: el libro de Cálculo de Smith y Minton (Smith & Minton, 2003), el libro Cálculo de James Stewar (Steward, Calculus, 2012), el libro Cálculo Conceptos y Contextos de James Steward, (Steward, Cálculo de una Variable Conceptos y Contextos, 2010), el libro de Cálculo de Purcell, Varberg y Rigdon (), el libro de Cálculo de Leithold (Lethold, 1998), el libro El Cálculo de una variable de Zill y Wright (Dennis G. Zill, 2011), el libro Cálculo de una variable de Thomas (Thomas, 2010), entre otros, nos muestra que todos ellos utilizan el MCI para descomponer una función racional en una suma de fracciones parciales. Diáz (2017, p.1-2).

Wiener and Watkins (1994, p. 28-31). Hablan del método práctico de Heaviside, (Oliver Heaviside, 1850-1925), quien realizó trabajos pioneros en cálculo operacional, "que fue particularmente útil para el análisis de … ondas trasmitidas por telegrafía", ahí expone un ejemplo,

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

En el cual menciona, que los alumnos de inmediato aceptan la estrategia de multiplicar ambos lados por el denominador del lado izquierdo.

$$2x + 1 = A(x+1)(x-1) + B\,x\,(x-1) + C\,x\,(x+1)$$

En donde se observa la conveniencia de evaluar en $x = 0, 1\ y - 1$. Para encontrar los valores de los numeradores, A, B y C.

Green y Ricca (2015, p.3) Recientemente, Sofronas, DeFranco, Vinsonhaler, Gorgievski, Schroeder and Hamelin (2011) encontraron concordancia entre la mayoría de los expertos a nivel nacional, en el sentido de que la integración es un componente crítico en el aprendizaje del cálculo. Más específicamente, estos expertos clasificaron las técnicas y los conceptos de integración como los dos aspectos más importantes para aprender la integración. Sin embargo, estudios previos han mostrado que la comprensión conceptual de la integración por parte de los estudiantes es débil, (Orton, 1983; Bennett, Moore, & Nguyen, 2011) Sabemos que enfocarse en conocer procedimientos es inadecuado sin un desarrollo concomitante de conceptos y estrategias para ayudar a los estudiantes decidir cuáles algoritmos y técnicas usar en alguna situación particular (Shoenfeld, 1978; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Aunque los procedimientos y conceptos interactúan dinámicamente (Byrnes & Wasik, 1991) sin conocimiento paralelo de estructuras en técnicas procedimentales y pensamiento estratégico, los estudiantes no estarán preparados para usar su conocimiento procedimental (Adey, 1999; Pettersson, & Scheja, 2008; Campbell, 2011).

Por otra parte, Msomi, A. M., & Bansilal, S. (2022, p.3). Los autores están de acuerdo en que el tópico de descomposición en fracciones parciales es una sección que muchos estudiantes encuentran tediosa y con frecuencia batallan con eso (Brazier & Boman, 2007; Man, 2012). La descomposición en FP no solo se usa en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias a través del método de TL, sino también

es usada en cálculo, álgebra lineal, álgebra moderna, matemáticas discretas y teoría de control (Brazier & Boman, 2007; Man, 2012).

Larson (2018, p. 128). Pautas para fracciones parciales. Factores lineales. 1. Sustituya los ceros de los factores lineales distintos en la ecuación básica. 2.En factores lineales repetidos, use los coeficientes determinados en el paso 1, para reescribir la ecuación básica. Luego sustituya otros valores convenientes de x, y despeje los coeficientes restantes. Para factores cuadráticos. 1.Desarrolle la ecuación básica. 2.Reúna términos de acuerdo con las potencias de x. 3. Iguale los coeficientes de términos iguales para obtener un sistema de ecuaciones que implique a las constantes A, B, C, … 4.Use el sistema de ecuaciones lineales para despejar A, B, C, …

Leithold (1982, p. 648). Describe la integración por descomposición en fracciones parciales en los casos de denominadores con factores lineales y cuadráticos. En Purcel et al (2000, p.392 y p.438) se resuelven algunos ejemplos de integrales de funciones racionales llamadas propias, el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Los ejemplos mostrados contienen descomposición en factores lineales simples distintos, factores lineales repetidos, así como algunos con factores cuadráticos. En la segunda página se muestra un ejemplo de aplicación a series infinitas llamada serie colapsante o serie telescópica, la descomposición en fracciones parciales ayuda a calcular el límite de la serie.

En Ibarra (2013, p.189) se aprecia también la utilidad de la descomposición en fracciones parciales, en particular se resuelven algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de segundo orden utilizando la transformada inversa de Laplace mediante el método de fracciones parciales.

METODOLOGÍA

La presente investigación corresponde a una investigación de enfoque cuantitativo, de alcance exploratorio y con muestreo no probabilístico por conveniencia, orientada al diagnóstico de las dificultades que presentan los estudiantes de Cálculo Integral al resolver integrales mediante fracciones parciales. Se fundamenta en la aplicación de un cuestionario con ejercicios matemáticos diseñados para identificar y clasificar errores conceptuales, algebraicos y procedimentales, cuyos resultados se analizan mediante frecuencias y porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. Su carácter exploratorio se justifica porque busca reconocer los errores más frecuentes y comprender las áreas de oportunidad en el aprendizaje, mientras que el enfoque cuantitativo se sustenta en la medición y el análisis numérico

de los resultados obtenidos en una muestra de 100 estudiantes distribuidos en cuatro grupos del Instituto Tecnológico de Toluca. Asimismo, el estudio contempla el análisis de los hallazgos para formular propuestas de intervención didáctica que contribuyan a mejorar el aprendizaje de los métodos de integración. Por tanto, el método científico aplicado se concreta en la identificación del problema, la formulación de una hipótesis sobre las dificultades algebraicas como posible causa de los errores, la recolección sistemática de datos, el análisis de resultados y la elaboración de propuestas de mejora educativa.

Población y muestra

Población: Alumnos del instituto Tecnológico de Toluca que se encuentran cursando la materia de cálculo integral en curso ordinario, repetición o especial.

Muestra: Será una muestra no probabilística por conveniencia que consta de 100 alumnos repartidos en 4 grupos.

Hipótesis

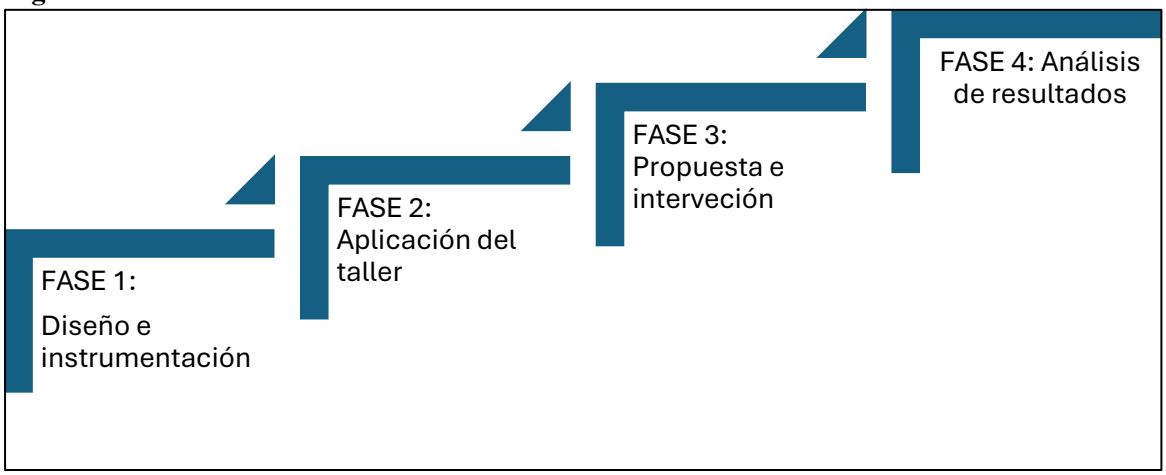
Las fallas en la solución de integrales por fracciones parciales se deben a la falta de desarrollo algebraico de los estudiantes.

Variables de estudio

Instrumentos de recolección de datos

Se realizará un cuestionario con cuatro diferentes ejercicios, los cuales se encuentran diseñados para evaluar los cuatro factores que representan un problema en los alumnos, en el primero la identificación del tipo de integral, en el segundo los valores del denominador, en el tercero la solución de las ecuaciones y en el cuarto la solución de la integral final. Los resultados serán evaluados en cada una de estas rúbricas para clasificar los errores dependiendo de cada fase, ver figura 1.

Figura 1. Fases del estudio



Fuente: (Elaboración propia, 2026)

FASE 1

Se compartirá el instrumento de evaluación con otros compañeros docentes para evaluar los ejercicios propuestos.

Se aplicará la evaluación a alumnos que no se encuentran dentro de la muestra para evaluar el tiempo que toma resolver los ejercicios.

FASE 2

Se aplicará el cuestionario una vez terminado el tema de métodos de integración y antes del examen de dicho tema, invitando a los alumnos a colocar paso por paso los procesos realizados en cada sección.

FASE 3

Procesamiento de resultados obtenidos.

FASE 4

Análisis de resultados y propuesta de intervención al identificar los errores más comunes cometidos.

Reactivos a evaluar

1)

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx$$

Objetivo: Evaluar requiere realizar la integral por fracciones parciales o únicamente por división polinomial.

2)

$$\int \frac{5x}{(x-2)^2}dx$$

Objetivo: Evaluar si coloca adecuadamente los numeradores al plantear la fracción parcial y evaluar la solución de la ecuación lineal.

3)

$$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}dx$$

Objetivo: Evaluar si coloca adecuadamente los numeradores al plantear la fracción parcial cuadrática y evaluar la solución de la ecuación cuadrática.

4)

$$\int \frac{2}{x^2+9}dx$$

Y

$$\int \frac{2x}{x^2+9}dx$$

Objetivo: Una vez realizado el proceso de fracciones parciales, identificar si la integral es un logaritmo natural o es una integral trigonométrica inversa.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las cinco integrales planteadas, en la primera pregunta se solicitaba resolver la siguiente integral

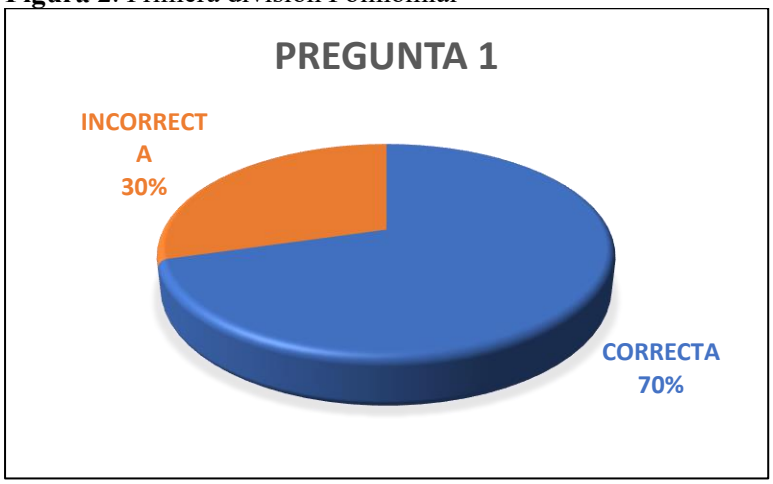
$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx \quad (1)$$

El objetivo de la integral era verificar si los estudiantes realizaban primero la división polinomial debido a que el exponente del numerador es mayor que el exponente del denominador, al efectuar esta operación se proseguía a realizar la integral por fracciones parciales. En los resultados expuestos en la figura 2 se puede observar que el 70% de los estudiantes obtuvo una respuesta correcta. Finalmente, si el estudiante no realizaba la división, al obtener los coeficientes, se llegaba a una indeterminación. Al considerar las respuestas incorrectas, es importante mencionar que la problemática para obtener un

resultado correcto, también dependió de la solución del sistema de ecuación con dos incógnitas que presentaba el ejercicio.

Dentro de los errores que presentaron los alumnos en la resolución de ejercicios fue que no realizaron la división, por ello, cuando querían obtener los coeficientes obtuvieron una indeterminación o tomaron valores erróneos para igualar los coeficientes, también se encontraron exámenes sin el ejercicio resuelto.

Figura 2. Primera división Polinomial



Fuente: (elaboración propia, 2026)

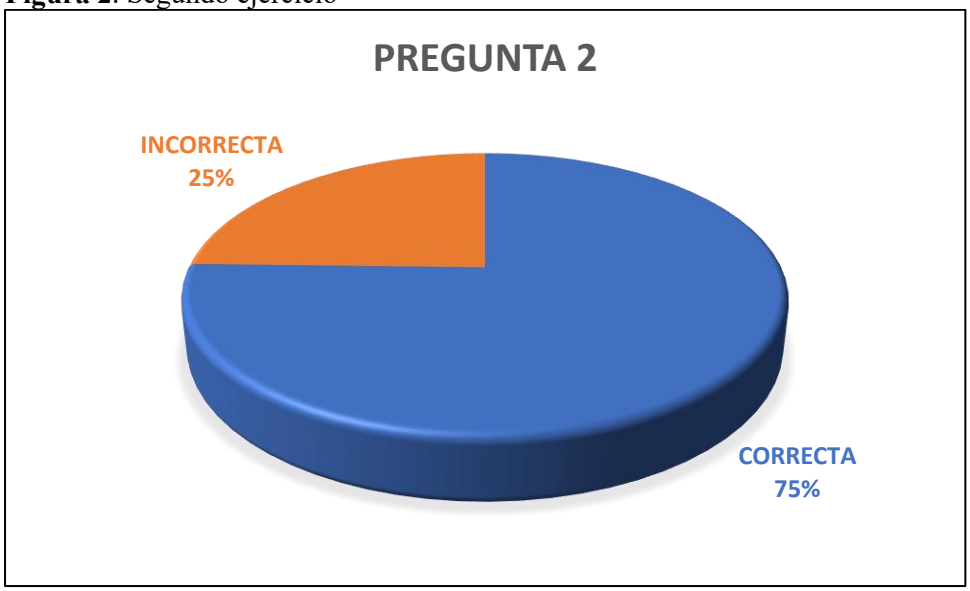
En la segunda pregunta se evaluó la siguiente integral

$$\int \frac{5x}{(x-2)^2}\,dx \quad (2)$$

Cuyo objetivo era evaluar si los alumnos colocaban adecuadamente los numeradores y denominadores, primero debido a que no es una función cuadrática, por ello únicamente se debe considerar un término, en segundo lugar, al ser un término repetido, era necesario colocar numerador para cada una de las potencias del denominador. En la figura 2, se observa que el 75% de los estudiantes contesto de forma correcta.

Dentro de los errores observados fue que no colocaron los dos coeficientes para realizar la fracción, se encontraron ejercicios sin planteamiento y solución. De igual forma, entre los errores cometidos se encuentra el signo de un coeficiente, lo cual llevó a tener una respuesta incorrecta.

Figura 2. Segundo ejercicio



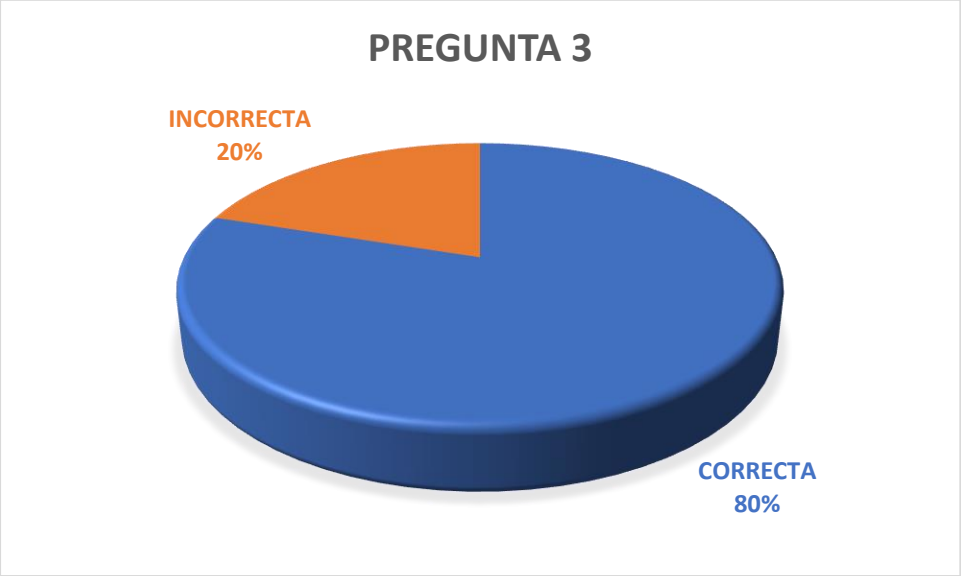
Fuente: (elaboración propia, 2026)

En la pregunta 3 el objetivo fue evaluar si el estudiante planteaba de forma correcta los numeradores debido a que se contaba con una función cuadrática, posteriormente debía obtener los coeficientes y realizar la integra, en este ejercicio la integral planteada fue la siguiente

$$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}dx \quad (3)$$

En la Figura 4 se observa que 80% de los estudiantes obtuvo una respuesta correcta, al identificar de manera adecuada los coeficientes de los numeradores que debían elegirse. Dentro de los errores que se encontraron, fueron la parte algebraica en el despeje de los coeficientes

Figura 3. coeficientes de los numeradores



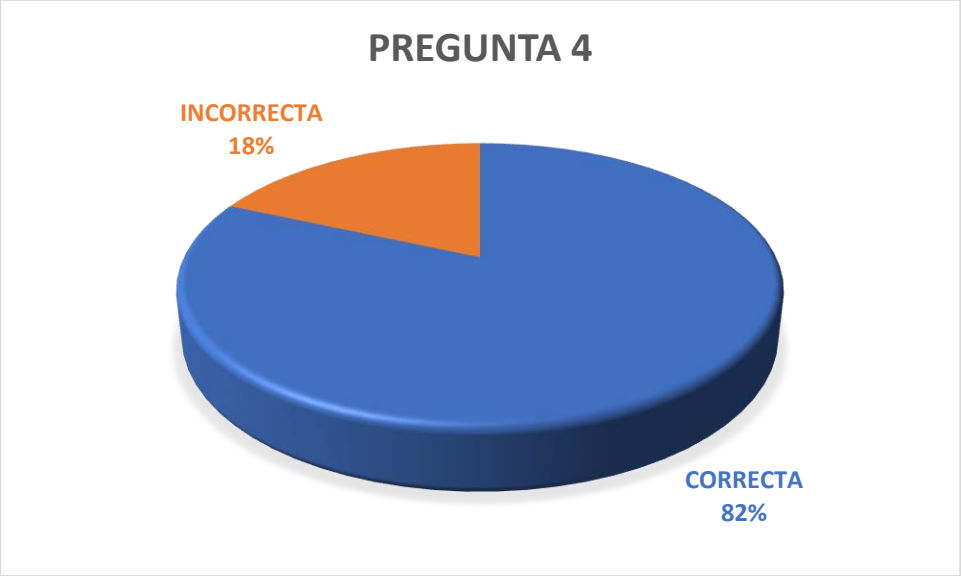
Fuente: (Elaboración propia, 2026)

Los ejercicios 4 y 5 no se realizaban con fracciones parciales y de manera general eran muy similares, salvo un factor x, en el numerador que modificaba totalmente el método de integración como se puede observar a continuación

$$\int \frac{2}{x^2+9} dx \quad (4)$$

La primera integral se realiza con sustitución trigonométrica al utilizar una tangente, por otro lado, la segunda se realiza con una sustitución simple del denominador. La intención de las integrales presentadas era precisamente que los estudiantes identificaran cuando se debe o no utilizar fracciones parciales y cuando es necesario utilizar otros métodos de integración. Los resultados mostrados en la Figura 4 muestran que 82% de los estudiantes identificó de manera correcta la integral por sustitución trigonométrica.

Figura 4. Sustitución trigonométrica



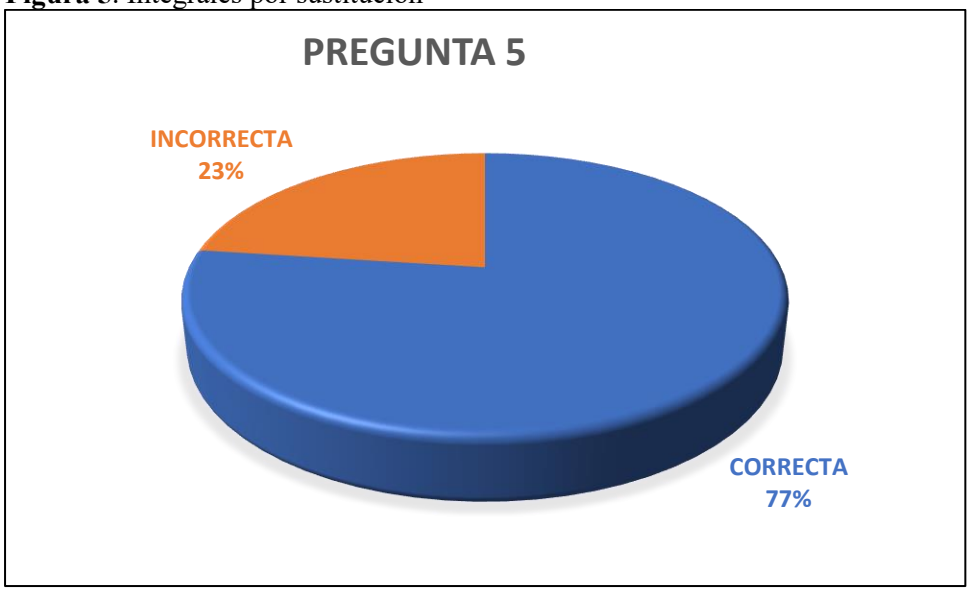
Fuente; (elaboración propia, 2026)

La integral cinco muestra una integral que se realiza con sustitución simple, sin necesidad de realizar el procedimiento por fracciones parciales como se muestra a continuación

$$\int \frac{2x}{x^2+9}dx \quad (5)$$

En la Figura 5 se muestra que 77% de los estudiantes resolvió la integral de manera correcta, si bien el tema de integrales por sustitución es el primero de los métodos de integración que se aborda y los estudiantes lo resuelven de forma correcta, la confusión que causa trabajar con integrales por fracciones parciales produce confusión y quizá consideran que todas las integrales deben resolverse por ese método. Dentro de los errores más comunes encontrados fue que los estudiantes intentaron realizar el ejercicio por fracciones parciales, de igual forma, separaron la suma de los denominadores, por ello, nuevamente se observa que en ocasiones el resultado incorrecto se debe al desarrollo algebraico de los estudiantes.

Figura 5. Integrales por sustitución



Fuente: (elaboración propia, 2026)

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en las integrales por fracciones parciales se observan que más del 70% de los alumnos lograron obtener un ejercicio correcto, debido a que identificaron en el primer ejercicio que previamente al uso de fracciones parciales se debe realizar una división, en el segundo y tercer ejercicio identificaron la forma repetida del denominador y los factores que debían colocar así como los factores cuadráticos y su correspondientes numeradores; finalmente en el cuarto y quinto ejercicios, los estudiantes lograron discernir entre una integral por sustitución y una integral por funciones trigonométricas inversas que no requerían ser abordadas por fracciones parciales.

Por otro lado, los estudiantes que respondieron de manera incorrecta las integrales presentaron dificultades en la parte algebraica, en la primera integral cometieron errores en la división y en el signo cuando la realizaban, en la segunda integral entre los errores observados fue no colocar de forma correcta los coeficientes, sin embargo, en los ejercicios que tenían correctamente asignados los coeficientes, la parte algebraica de resolver las ecuaciones los llevó a obtener valores erróneos o con signos diferentes a los correctos, esto ocurrió de manera similar en el ejercicio tres.

Con respecto a los ejercicios cuatro y cinco, la sustitución trigonométrica cuando fue utilizada con fórmula, se obtuvo resultado correcto, sin embargo, en aquellos alumnos que realizaron la integral sin fórmula, las sustituciones con las funciones trigonométricas, produjeron resultados erróneos, por tanto,

el resultado también lo fue. En la quinta integral, al intentar resolver por fracciones parciales, el resultado obtenido fue incorrecto.

Finalmente, en los ejercicios que presentaban resultados incorrectos, muchos de ellos, contenían errores algebraicos, desde divisiones incorrectas, separación de denominadores binomiales incorrectos, despejes con cambios de signo, omisión de pasos y confusión en el procedimiento.

Tomando en cuenta que los alumnos en la asignatura de cálculo integral, tomaron, hace un año, un curso de nivelación (curso propedéutico) esto nos habla de áreas de oportunidad a considerar para ser abordadas, en ambas dimensiones, el aspecto estudiantil y el docente.

El curso de nivelación abarca ampliamente temas algebraicos, así como trigonometría y geometría analítica en menor medida. Por otra parte, el tema 2: métodos de integración se vio favorecido en cuanto al tiempo asignado para su estudio, de 5 semanas, frente a los otros temas: el 1, 3 y 4.

LISTA DE REFERENCIAS

American Mathematical Association of Two-Year Colleges Review (AMATYC). Fall 1993-Spring 1994. https://eric.ed.gov/?q=partial+fractions&pr=on&ft=on&id=ED373817

Alexander Conde Sandra, Parada Vicente Liern. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. https://www.redalyc.org/journal/447/44745615019/

Barrera Mora Ivonne, Fernando y Sandoval Cáceres, Twiggy. (s. f.). Fracciones parciales: elementos para una discusión en el aula. https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/icbi/LI_EconomiaFinanzasMat/Barrera_Mora/Barrera-Twiggy-2005.pdf

Castro Pérez, Jaime; González Nucamendi, Andrés; Aguilar Sánchez, Gerardo Pioquinto. (2017). Generalización de un método de integración a través de factorizaciones. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84953103012

Cortina, José Luis; Zúñiga, Claudia; Visnovska, Jana La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones Educación Matemática, vol. 25, núm. 2, agosto-, 2013. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40528961002

Díaz Gómez, José Luis. (2017). Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales. https://recacym.org/index.php/recacym/article/download/15/6/654

Friz Carrillo, Miguel; Sanhueza Henríquez, Susan; Sánchez Bravo, Alejandra; Belmar Mellado, Marta; Figueroa Manzi, Ernesto. (2008). Propuestas didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en fracciones. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=97912401006

Green, Kris; Ricca, Bernard P. (2015). Integration through a Card-Sort Activity. https://eric.ed.gov/?q=partial+fractions&pr=on&ft=on&id=EJ1082025

Ibarra Escutia, Joel. (2013). Matemática 5 Ecuaciones Diferenciales. Editorial McGraw-Hill. ISBN: 978-607-15-0962-8.

Mousley, Keith y Kurz, Christopher. (2015). Pre-College Deaf Students' Understanding of Fractional Concepts: What We Know and What We Do Not Know. https://eric.ed.gov/?q=partial+fractions&pr=on&ft=on&id=EJ1169637

Larson, Ron. (2018). Precálculo, introducción a las matemáticas universitarias. Ed. Cengage Learning Editores, S. A. de C. V.

Leithold, Louis. (1982). El Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Harla S. A. de C. V.

Martínez A., Alejandro. (2006). Descomposición en fracciones parciales. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84911639045

Martínez-Planell, Rafael; Carmen González, Ana; Di Cristina Yumet, Gladys; Acevedo Vanessa. (2011). Construcciones SERLIST y SERFUNC de series infinitas. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40521124008

Murillo Tsijli, Manuel. (2015). Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=607973017003

Msomi , Mvunyelwa, Alfred; Bansilal, Sarah. (2022). Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Solving Linear Ordinary Differential Equations Using the Method of Laplace Transform. https://eric.ed.gov/?q=partial+fractions&pr=on&ft=on&id=EJ1343179

Purcell. Edwin J.; Varberg, Dale: Rigdon, Steven E. (2000). Cálculo. Pearson Educación. ISBN: 970-26-0132-0

Resnick, Ilyse, Rinne, Luke , Barbieri, Christina, and Jordan, Nancy C. (2018).

Children's Reasoning About Decimals and Its Relation to Fraction Learning and Mathematics Achievement. https://eric.ed.gov/?q=partial+fractions&pr=on&ft=on&id=ED593867

Ríos García, Yaneth. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73713207

Ruiz Moreno, Leonsio; Camarena Gallardo, Patricia; del Rivero Jiménez, Socorro. (2016).

Prerrequisitos deficientes con software matemático en conceptos nuevos. Transformada de Laplace. https://www.redalyc.org/journal/140/14045395002/

Stelzer, Florencia; Andrés, María Laura; Canet-Juric, Lorena; Introzzi, Isabel; Urquijo, Sebastián. (2016). Relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las fracciones Cuadernos de Investigación Educativa. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=443646604002

Toro-Carvajal, Luis Alberto; Ortíz-Álvarez, Hugo Hernán; Jiménez-García, Francy Nelly; Agudelo Calle, Jairo de Jesús Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de la matemática Educación y Educadores, vol. 15, núm. 2, mayo-agosto, 2012, pp. 167-183 Universidad de La Sabana Cundinamarca, Colombia. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83424870002

Wiener, Joseph y Watkins, Will. (1994). Calculus to Algebra Connections in Partial Fraction Decomposition, the AMATYC Review. American Mathematical Association of Two-Year Colleges, (AMATYC, Editor: Browne, Joseph). ISSN-0740-8404.

Voon Li Li, Nor Hazizah Julaihi, Tang Howe Eng. (2016). Misconceptions and Errors in Learning Integral Calculus. https://eric.ed.gov/?q=partial+fractions&pr=on&ft=on&id=EJ1207815