Ciencia Latina
Revista Multidisciplinar

Aplicaciones de la Regla de Hudde en Ecuaciones y funciones de Segundo Grado

Alberto Ernesto Gutiérrez Borda
egutierrez@unica.edu.pe
https://orcid.org/0000-0001-6260-2419
Doctor en education Mathematics.
Profesor principal a dedicación exclusiva,
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional San Luis Gonzaga
Ica - Perú

RESUMEN

Las primeras ideas fuerza del trabajo surge cuando se revisa algunas propiedades de las ecuaciones polinómicas, se trata de encontrar reglas y métodos para crear conceptos que sirvan de puente entre lo algebraico y lo geométrico, generar una situación problemática dirigido a estudiantes del nivel medio, un espacio que posibilite la aplicación significativa de conceptos. El objetivo principal es propiciar la generalización y abstracción de manera significativa tomando como base un tema, la regla de Hudde aplicado al análisis de ecuaciones y funciones de segundo grado. Su importancia radica al tratarse de uno de los problemas conocidos de la antigüedad, la formulación de reglas donde las ecuaciones polinomiales ordinarias se transforman hasta obtener resultados similares a las que se llegan con el actual cálculo de derivada. La proyección de esta investigación se podría ampliar y enfocar a casos más generales.

Palabras claves: regla de Hudde, derivadas, tangente, ecuaciones polinomiales

Applications of the Hudde Rule in second degree equations and functions

ABSTRACT

The first ideas of labor force arises when we review some properties of polynomial equations, we try to find rules and methods to create concepts that serve as a bridge between the algebraic and the geometric, to generate a problematic situation aimed at middle-level students, a space that allows the meaningful application of concepts. The main objective is to promote generalization and abstraction in a meaningful way based on a topic, the Hudde rule applied to the analysis of equations and functions of second degree. Its importance lies in being one of the known problems of antiquity, the formulation of rules where ordinary polynomial equations are transformed to obtain results similar to those reached with the current derivative calculation. The projection of this research could be expanded and focus on more general cases.

Keywords: hudde rule, derivatives, tangent, polynomial equations

Artículo recibido: 05 de Abril 2021
Aceptado para publicación: 28 de Mayo 2021
Correspondencia: egutierrez@unica.edu.pe
Conflictos de Interés: Ninguna que declarar

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad se exige al estudiante tanto del nivel medio como superior, que desarrolle capacidades, habilidades y actitudes que le permitan responder a las exigencias actuales impuesta por este mundo globalizado; cierto, ya no es suficiente con saber o tener información, sino requiere analizarla y discernir para después utilizarla (Castro, 1019; Artigue, et al., 1995).

El conocimiento matemático es influenciado por el contexto cultural y social, la historia prueba que es una actividad humana y su utilidad en el aula permite mostrar su naturaleza multidisciplinaria. La Matemática como ciencia tiene un desarrollado en paralelo con la historia de la humanidad, existen momentos trascendentales en investigación, un largo camino recorrido antes de la invención simultánea por Newton y Leibniz: el cálculo infinitesimal (Sierra, 2000).

Un resumen de éstos problemas, ¿Cómo calcular las rectas tangentes y normales a una curva en un punto? ¿Cómo localizar los posibles puntos máximos y mínimos de una curva? En la actualidad las respuestas son relativamente sencillas mediante la noción de derivadas; pero, en el momento histórico situado no era fácil (Gavurín, 1973).

Todos los métodos tienen una gran importancia y sus mismos autores lo indican, pero existen complicaciones cuando se quiere aplicar a un caso concreto, más aún cuando no resuelven de manera total un problema. En este punto aparece la utilidad de la Regla de Hudde(1), como recurso que facilita la aplicación de algunos de ellos (Gonzales, 1992).

La Regla de Hudde, lo podemos encontrar en una carta publicada en su edición latina de 1659 de la *Geométrie* de Descartes que fue publicado por Fran van Schooten(2). La formulación dice "*Si una ecuación tiene dos raíces reales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido será una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada*" (Borbaki, 1972).

Este resultado sería un método ingenioso para encontrar múltiples raíces de una ecuación, que es esencialmente el método moderno de búsqueda del mayor común de un polinomio y sus derivadas. Se destaca un resultado que permiten calcular raíces dobles de

---

(1) Johann Hudde, matemático holandés, centró su trabajo con máximos y mínimos, y las teorías de ecuaciones.
(2)Frans van Schooten, matemático holandés, promovió la extensión de la Geometría Cartesiana.

polinomios; haciendo operativo el método de Descartes para determinar la recta normal a una función en un punto. Situaciones más explícitas sería, si $x = a$ es máximo o mínimo relativo del polinomio

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

que permite asumir que $x = a$ *es una raíz de la ecuación*

$na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + (n-2)a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x = 0,$

y que $xP´(x) = 0$. Por tanto, $x = a$ es una raíz de $P´(x) = 0$ (Dubinsky, 1991).

Fermat había señalado que los máximos y mínimos de una curva $y = f(x)$, estan asociadas a las raíces dobles de la ecuación $f(x) = M$ donde M sería el máximo o mínimo alcanzado, con razón Hudde pudo tomar como punto de partida de su investigación la determinación de las raíces doble de una ecuación $F(x) = f(x) - M = 0$, o bien plantearse directamente, cual es el valor de M para que resulte en la ecuación alguna raíz doble (Vizmanos, 1990; Contreras, et al., 2004).

Es destacable el resultado siguiente, si $x = a$ es raíz doble del polinomio $y = P(x)$ y al multiplicar por la progresión aritmética de primer término b y diferencia d, el polinomio resultante $P(x)$ verifica $P(x) = b.P(x) + d.x.P´(x)$ (Vinagradov, 1977).

Naturalmente, las dificultades de accesos a diversos cálculos, va estar latente, como señalara Tuker, hay tres aspectos siempre presentes para el estudiante: complejidad de los objetos en estudio, conceptualización y formalización, modo de pensar que podría ser puramente algebraico (Tuker, 1991).

El trabajo tiene su centro de estudio en los principales conceptos del cálculo que aparecen subyacente a lo largo del artículo, ilustra métodos con resultados prácticos a varios casos concretos, sobre todo resalta la utilidad e importancia de la regla de Hudde para ecuaciones con una solución doble; con cambios y variaciones, sustituciones de las progresiones aritméticas (Gonzales, 1999)

En este sentido, el objetivo se centra en aplicar la regla de Hudde a ecuaciones y funciones cuadráticas, estudiando en cada paso el nivel de dificultad, estableciendo propiedades que cumplen las ecuaciones relacionados con sus parámetros (Stewart, 2000; Grattan, 1984).

2. METODOLOGÍA

Es bibliográfico, se echa mano a la técnica (o método) de análisis, aunque se utiliza más en ciencias sociales, pero se adapta bien en matemáticas como herramienta eficaz, tal como señala Bardín (1986) “técnica de análisis, tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) siguiendo procedimiento sistemático, permitiendo la inferencia de conocimiento.

El presente artículo es la sistematización de algunos elementos vinculados al proceso de creación de situaciones problemáticas en matemáticas dirigidos a estudiantes de primeros cursos generales en el marco de enseñanza y aprendizaje, jóvenes que pasan de la secundaria al nivel superior.

3. RESULTADOS

REGLAS Y CONCEPTOS

Antes de comenzar con el tema de fondo, es necesario definir una serie de conceptos para entender la propuesta. En primer lugar, es fundamental saber que se entiende por Regla de Hudde. La solución al conocido problema de determinar las dimensiones del rectángulo con perímetro p y de área máxima, pasa por considerar que x y $\frac{p-2x}{2}$ son las posibles dimensiones de sus lados y considerar la función

$$A(x) = x\left(\frac{p-2x}{2}\right) = \frac{px}{2} - x^2$$

de la que deberíamos obtener su máximo.

El cálculo del valor de x para que $A(x)$ sea máxima obedece a reglas directas y viene desde los rudimentos del cálculo infinitesimal como una de las primeras aplicaciones de la función derivada, $A'(x) = \frac{p}{2} - 2x$, la raíz de $A'(x) = 0$, entre esas raíces tiene que estar los valores que hacen máxima la función. En este caso la única raíz es $x = \frac{p}{4}$, que maximiza $A(x)$. En definitiva, el área máxima del rectángulo es un cuadrado de lado $\frac{p}{4}$, con área $A\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p^2}{16}$ (Gonzales, 1992).

Esta operación resulta fácil, porque se conoce las reglas de cálculo de la función derivada, y la resolución de la ecuación resultante. En el caso planteado, la solución final ha requerido simplemente la regla de derivación de un polinomio de segundo grado y la resolución de una ecuación de primer grado. En el caso más general para la función polinómica

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

se obtiene como derivada

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}.$$

En la historia de las matemáticas, el uso de ciertos recursos algorítmicos procede a la definición del concepto que usualmente se toma como su fundamento. Para el caso de máximos y mínimos, ciertas transformaciones de los polinomios permitieron ver y emplear lo que se conoce como función derivada. Se puede encontrar conceptos, como de la derivada, cuya aparición se formaliza tras un largo proceso de verificación de diversos enfoques y motivados a problemas comunes. En cuanto a las funciones polinómicas, la determinación de sus raíces es un asunto decisivo de cara a la formulación algebraica de las propiedades de las curvas (Boyer, 1999; Collette, 1993).

Fermat hizo ver que los máximos y mínimos de una curva $y = f(x)$ estaban asociados a las raíces dobles de la ecuación $f(x) = m$ donde m sería el máximo o mínimo alcanzado. Por eso Hudde pudo tomar como punto de partida de sus investigaciones la determinación de las raíces doble de la ecuación $F(x) = f(x) - m = 0$, o directamente hacer un cuestionamiento del cuál podría ser el valor *m* para que resulte en la ecuación alguna raíz doble.

Una prueba general; supongamos al igual hizo Hudde en su demostración, el polinomio

$E(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$,

si para la transformación, se usara la progresión aritmética $a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots, a+(n-1)b,\ a+nb$, resulta

$$E^*(x) = aa_0 + (a+b)a_1x + \cdots + (a+(n-1)b)a_{n-1}x^{n-1} + (a+nb)a_nx^n =$$

$$= a(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) + bx(a_1 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1})$$

$$= aE(x) + bxE'(x)\ .$$

En esta última igualdad, aparece un segundo polinomio, $E'(x)$, la derivada de $E(x)$. Aunque la transformación operada en el polinomio no es exactamente su derivada; pero, lo obtenido está cerca de ella, es suficiente con que la transformación se realice tomando como base la progresión aritmética natural $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n$. Es decir, con $a = 0\ y\ b = 1$, resulta $E^*(x) = xE'(x)$. Esto permite una reconstrucción de la regla en un estilo más actual, o sea con derivadas: Si β es raíz doble de $E(x) = 0$, entonces también será raíz de $E'(x) = 0$ (Grattan, 1984).

Partiendo de la igualdad inicial $E^*(x) = aE(x) + bxE'(x)$, se prueba con mayor rigor la conjetura anterior, pero no por los métodos de Hudde, si no utilizando el cálculo habitual de derivadas, reglas del cálculo, las derivadas, posterior a la regla de Hudde. Para la demostración, se considera $E(x) = (x - \beta)^2 Q(x)$, por ser β raíz doble, se forma $E'(x)$, para la transformación se tiene

$E^*(x) = a(x - \beta)^2 Q(x) + bx[2(x - \beta)Q(x) + (x - \beta)^2 Q'(x)]$

por lo que es evidente que β es raíz de $E^*(x) = 0$.

Según Fermat, estas cantidades aparecerán en todo caso como raíces dobles de la ecuación $E(x) = f(x) - m = 0$. Pero; es más fácil localizarlas como raíces simples de un polinomio más sencillo, a saber $E^*(x)$, aunque esta condición sólo es necesaria y no suficiente para que las raíces ahí obtenidas sean dobles en $E(x)$. Esta traslación del teorema al tema geométrico lo refleja Hudde como método o regla de cálculo en los siguientes términos: "Cualquier cantidad algebraica, considerada máximo o mínimo, se hace igual a w; ordenada la ecuación se multiplica por una progresión aritmética del modo que se ha dicho: y el producto será una ecuación que tiene raíz común con el precedente" (Boyer, 1999; Collette, 1993).

PROPIEDADES Y RELACIONES

Cambiar los coeficientes de la ecuación para comprobar si existe alguna relación entre las soluciones de la original y de la modificada. Sean las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0 \quad y \quad cx^2 + bx + a = 0$

Planteamos las soluciones algebraicas de ambas ecuaciones, de $ax^2 + bx + c = 0$ es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, de $cx^2 + bx + a = 0$ es $x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c}$. En una primera observación, si $a = c$, ambas ecuaciones son iguales $ax^2 + bx + c = cx^2 + bx + a$. Otros resultados lo damos como proposiciones.

Proposición 1. Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ y $cx^2 + bx + a = 0$ son números inversos dos a dos.

Demostración. Se conoce que el producto de dos números inversos tiene como solución a 1. La demostración algebraica: sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, también r_1, r_2 las raíces de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$, entonces

$x_1 . r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c} = 1$

$x_2 . r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c} = 1$.

Por tanto, x_1 es inversa a r_2, y x_2 es inversa a r_1.

Proposición 2. Las soluciones de las ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$ y $ax^2 - bx + c = 0$ son dos números opuestos dos a dos.

Demostración. La suma de dos números opuestos tiene como solución a 0. Pasamos a la demostración algebraica:

$x_1 + r_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$

$x_2 + r_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$.

Por tanto, x_1 es opuesta a r_2; y x_2 es opuesta a r_1.

Proposición 3. Las soluciones de las ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$ y $-ax^2 + bx - c = 0$ son números opuestos dos a dos.

Demostración. La prueba algebraica

$x_1 + r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} = 0$

$x_2 + r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} = 0$

Por tanto, x_1 es opuesta a r_1, y x_2 es opuesta a r_2.

CÁLCULO DE COEFICIENTES SUJETA A CONDICIONES

Situación problemática 1. Calcule p, para que las soluciones de la ecuación $x^2 + 5x = p$ sean enteros.

La solución de la ecuación de $x^2 + 5x - p = 0$ es $x = \frac{-5\pm\sqrt{25+4p}}{2}$. De esta expresión obtenemos algunas conclusiones: (i) La expresión $-5 \pm \sqrt{25 + 4p}$ debe ser un número par, que dividido entre dos resulte un número entero. (ii) La expresión $\sqrt{25 + 4p}$ debe ser un número impar, para que al sumarlo con -5 quede un número par. (iii) Para que $\sqrt{25 + 4p}$ sea un número entero impar, $25 + 4p$ debe ser un cuadrado perfecto.

Con estas precisiones, se tiene $25 + 4p = (2m - 1)^2$, es decir $p = \frac{(2m-1)^2-25}{4}$ con m número natural. Comprobamos con algunos números que si 25 + 4p cumple esta condición, los resultados de la ecuación son números enteros, de la forma que estamos buscando: $\sqrt{25 + 4p} = \sqrt{1} = 1$, las raíces son $x_1 = -2$, $x_2 = -3$; si $\sqrt{25 + 4p} = \sqrt{9} = 3$, las raíces son $x_1 = -1$, $x_2 = -4$; si $\sqrt{25 + 4p} = \sqrt{25} = 5$ entonces las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

Proposición 4. Para que las soluciones de $x^2 + 5x = p$ sean números enteros, p debe ser de la forma $p = \frac{(2m-1)^2-25}{4}$ siendo m un número natural.

Para encontrar una relación entre los distintos valores que pueden tener p, damos diferentes valores a $25 + 4p$, los distintos valores que puede tomar p forman una sucesión $-6,\ -4,\ 0,\ 6,\ 14,\ 24,\ 36, ...$, se trata de una sucesión cuyo primer término es – 6 y con ley de recurrencia $S_m = S_{m-1} + 2(m-1)$, a partir de esta ley, se determina el término general de una sucesión de dos maneras diferentes:

$S_1 = -6 \quad S_2 = S_1 + 2(1) \quad ,$

$S_3 = S_2 + 2(2) = S_1 + 2(1) + 2(2)$

$\ldots$

$S_{m-1} = S_{m-2} + 2(m-2) = S_1 + 2(1) + 2(2) + 2(3) + \cdots + 2(m-2)$

$S_m = m^2 - m - 6$.

La sucesión $-6,\ -4,\ 0,\ 6,\ 14,\ 24,\ 36,\ldots$, señala que el término general es de segundo grado de la forma $S_m = am^2 + bm + c$, y se puede analizar para algunos números de la sucesión $S_1 = -6,\ S_2 = -4,\ S_4 = 6$, resulta el sistema

$a + b + c = -6, 4a + 2b + c = -4, 16a + 4b + c = 6$

al resolver el sistema se obtiene que $a = 1,\ b = -1\ y\ c = -6$ de manera que la sucesión es $S_n = m^2 - m - 6$, al conocer el valor de p permite reformular la proposición 5.

Proposición 5. Para que las soluciones de $x^2 + 5x = p$ sean números enteros, p debe ser un término de la sucesión definida por $S_m = m^2 - m - 6$ siendo m un número natural.

En la proposición 4, se tenía que $p = \frac{(2m-1)^2 - 25}{4} = m^2 - m - 6$, que coincide con el resultado obtenido.

GENERALIZACIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

¿Qué posible relación puede existir entre b y p para que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx = p$ sean números enteros? Para analizar el problema, se sigue la misma ruta de la situación problemática 1 resuelta.

De $x^2 + bx = p$, sus raíces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4p}}{2}$. Para que las soluciones de esta ecuación sean números enteros, $b^2 + 4p$ debe ser un cuadrado perfecto. A este número le llamamos m^2. Es decir, $b^2 + 4p = m^2$, que al sustituir en la ecuación se obtiene $x = \frac{-b \pm m}{2}$.

Se puede conjeturar que b y m deben tener la misma paridad. Es decir, para que la suma sea par, ambos deben ser pares o ambos impares, con estas precisiones se inicia la solución del problema. Al tener una ecuación con tres incógnitas, se comienza dando valores a m y observar el comportamiento de los demás.

Si $b = 1$, y como m también debe ser impar, resulta

$m = 1, p = 0, x_1 = -1,\ x_2 = 0$

$m = 3, p = 2, x_1 = -2,\ x_2 = 1$

$m = 5, p = 6, x_1 = -3,\ x_2 = 2$

$\dots$

con los valores que adquieren las diferentes incógnitas se forman sucesiones, cuyos términos generales se determinan con varias operaciones y, $m = 2q - 1,\ p = q^2 - q$, donde las raíces de la ecuación son $x_1 = -q,\ x_2 = q - 1$.

Si $b = 2$, y como m también debe ser par, se tiene

$m = 2, p = 0, x_1 = 0,\ x_2 = -2$

$m = 4, p = 3, x_1 = 1,\ x_2 = -3$

$m = 6, p = 8, x_1 = 2,\ x_2 = -4$

$\dots$

de aquí, $m = 2q,\ p = q^2 - 1$, las raíces de la ecuación son $x_1 = q - 1,\ x_2 = -q - 1$.

Si $b = 3$, y como m también debe ser impar, se obtiene

$m = 1, p = -2,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1$

$m = 3, p = 0, x_1 = -3,\ x_2 = 0$

$m = 5, p = 4, x_1 = -4,\ x_2 = 1$

$\dots$

luego, $m = 2q - 1$, $p = q^2 - q - 2$, donde las raíces de la ecuación son $x_1 = -q - 1$, $x_2 = q - 2$.

Si $b = 4$, y como m también debe ser par, se tiene

$m = 2, p = -3, x_1 = -1,\ x_2 = -3$

$m = 4, p = 0, x_1 = 0,\ x_2 = -4$

$m = 6, p = 5, x_1 = 1, x_2 = -5$

$\dots$

entonces, $m = 2q, p = q^2 - 4$, las raíces de la ecuación son $x_1 = q - 2,\ x_2 = -q - 2$.

Mientras que, de las distintas observaciones, se deduce ciertas regularidades, que difieren según b toma un valor par o impar. Por tanto, es posible encontrar una generalización distinguiendo dichos valores.

Si $b = 2n - 1$, entonces $m = 2q - 1$, y $p = (q^2 - q) + (n^2 - n)$ de manera que la solución de la ecuación es $x_1 = q - n$ y $x_2 = -q - n + 1$.

Si $b = 2n$, entonces: $m = 2q$ y $p = q^2 - n^2$, la solución de la ecuación es $x_1 = q - n$ y $x_2 = -q - n$, siendo n y m números naturales.

DISCUSIÓN CON LA REGLA DE HUDDE

Al conocer la regla de Hudde, el propósito es trabajar con las ecuaciones de segundo grado, entender cuál es el efecto de cambio que puede ocasionar. Para estudiarlo en detalle se vuelve al caso concreto de ecuaciones de segundo grado, para tal efecto utilizamos un proceso más sencillo que el caso general. Sea la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

y sea la progresión aritmética

$$q,\ q + d,\ q + 2d \qquad (2)$$

según la regla de Hudde la ecuación (1) tiene solución doble, en este caso la solución es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = -\frac{b}{2} \qquad (3)$$

$$b^2 - 4ac = 0\ . \qquad (4)$$

La ecuación mediante la transformación por la progresión aritmética se escribe

$$aqx^2 + b(q + d)x + c(q + 2d) = 0 \qquad (5)$$

y sea r la solución de la ecuación (5), esto es

$$r = \frac{-b(q+d) \pm \sqrt{b^2(q+d)^2 - 4aqc(q+2d)}}{2aq}$$

hay que tener en cuenta que por (4) la discriminante de la ecuación (1) es $b^2 = 4ac$, entonces

$$r = \frac{-bq - bd \pm bd}{2aq}$$

dos soluciones

$$r_1 = -\frac{b}{2a}, r_2 = \frac{-b}{2a}\left(\frac{q+2d}{q}\right). \qquad (6)$$

Por tanto, se comprueba de (3) y (6) ambas ecuaciones tienen como solución a $\frac{-b}{2a}$. Al demostrar la regla para este caso concreto, averiguamos de paso, las relaciones entre las soluciones de (5).

Proposición 6. La relación entre las soluciones de la ecuación de segundo grado multiplicada por la progresión aritmética es que una de ellas es igual a la otra multiplicada por el cociente entre el último y el primer término de la progresión utilizada.

El siguiente análisis hace ver lo que sucede si $q = 0$, ¿cumple la regla de Hudde? Sea la ecuación

$aqx^2 + b(q + d)x + c(q + 2d) = 0$

como $q = 0$, entonces se reduce a

$aqx^2 + b(q + d)x + c(q + 2d) = bdx + c(2d) = 0$

de donde se tiene $x = \frac{-2c}{b}$ es solución. ¿Cómo son las soluciones $\frac{-2c}{b}$ y $\frac{-b}{2a}$? La respuesta es que son iguales, pues $\frac{-2c}{b} = \frac{-b}{2a}$ donde $-4ac = -b^2$, entonces $b^2 - 4ac = 0$. Por tanto, se cumple la regla de Hudde, proposición 7.

Proposición 7. En una ecuación de segundo grado con solución doble se cumple que $\frac{-2c}{b} = \frac{-b}{2a}$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Situación problemática 2: Dada la ecuación de solución doble $ax^2 + bx + c = 0$, donde la discriminante $b^2 - 4ac = 0$, se trata de ver cómo será el valor de la discriminante de la ecuación

$$aqx^2 + b(q + d)x + c(q + 2d) = 0 \qquad (\alpha)$$

que es resultado de multiplicar a, b y c por una progresión aritmética $q,\ q + d,\ q + 2d$. La solución de la ecuación (α) es

$$x = \frac{-b(q+d) \pm \sqrt{[b(q+d)]^2 - 4aqc(q+2d)}}{2aq}$$

donde la discriminante es $\Delta = (b^2 - 4ac)(q^2 + 2qd) + b^2d^2$.

Situación problemática 3: Dada la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\gamma_1)$$

con soluciones dobles, se quiere hallar los términos sucesivos de la progresión aritmética, de modo que se tiene que multiplicar a los coeficientes a, b, c de la ecuación (γ_1) para conseguir soluciones de

$$aqx^2 + b(q + d)x + c(q + 2d) = 0 \qquad (\gamma_2)$$

que se quiere obtener. Llamando $-\beta$ a la solución doble de (γ_1), $(x + \beta)^2 = x^2 + 2\beta x + \beta^2$, donde $x_1 = -\beta,\ x_2 = -\beta$ y los coeficientes son $a_1 = 1,\ b_1 = 2\beta,\ c_1 = \beta^2$. Como se quiere que las soluciones de (γ_2) sean α y $-\beta$, ya que una de las soluciones tiene que ser igual a la solución doble de la ecuación (γ_1) probado por la regla de Hudde, entonces la ecuación será

$(x+\beta)(x-\alpha) = x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta$

$= x^2 + (\beta-\alpha)x - \alpha\beta$

donde los coeficientes son: $a_2 = 1,\ b_2 = \beta - \alpha,\ c_2 = -\alpha\beta$. De manera que la progresión aritmética por la que hemos multiplicado a la ecuación (γ_1) para obtener (γ_2) es $a_1 q = 1,\ b_1(q+d) = \beta - \alpha$, $c_1(q+2d) = -\alpha\beta$, es decir

$q = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1;\ q + d = \frac{\beta-\alpha}{b_1} = \frac{\beta-\alpha}{2\beta};\ q + 2d = \frac{-\alpha\beta}{c_1} = \frac{-\alpha\beta}{\beta^2} = \frac{-\alpha}{\beta}$.

Habría que demostrar que estos términos forman parte definitivamente de una progresión aritmética, entonces hay que comprobar si $(q+d) - q = (q+2d) - (q+d)$,

$\frac{\beta-\alpha}{2\beta} - 1 = \frac{-\alpha}{\beta} - \frac{\beta-\alpha}{2\alpha}, \frac{-\alpha-\beta}{2\beta} = \frac{-\alpha-\beta}{2\beta}$,

lo que se traduce en una interesante situación problemática sobre la demostración de la regla de Hudde aplicada al estudio de la ecuación de segundo grado.

REGLA DE HUDDE ASOCIADO A LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

Pasamos a la función cuadrática: $ax^2 + bx + c = y$, para realizar un estudio de su vértice, analizar si la Regla de Hudde se cumple, tanto para las ecuaciones de segundo grado como para las funciones cuadráticas. Las soluciones de las ecuaciones son los puntos de corte de la función con el eje OX.

En primer lugar, averiguamos la abscisa del vértice de la función cuadrática

$ax^2 + bx + c = y$. $\qquad (\varepsilon_1)$

Esta parábola es simétrica respecto a una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje OY. Por lo tanto, la parábola corta a la recta $y = c$ en dos puntos simétricos. Hallamos las abscisas de estos puntos: de $y = ax^2 + bx + c$ siendo $y = c$ se tiene $ax^2 + bx = 0$ cuyas soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-b}{a}$.

Este valor es el mismo que el de la solución doble de (ε_1). Cómo las raíces de una función coinciden con sus puntos de corte con el eje X, concluimos que el vértice de las funciones con raíz doble coincide con dicha raíz. Si partimos de $ax^2 + bx + c = 0$ pues $y = 0$ y debido a que tiene solución doble, entonces $x_v = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Una vez aclarado, se propone averiguar la abscisa y la ordenada del vértice de (ε_2)

$aqx^2 + b(q+d)x + c(q+2d) = y$. $\qquad (\varepsilon_2)$

Si partimos de la ecuación del vértice ya demostrado anteriormente: $ax^2 + bx + c = y$ siendo $x_v = \frac{-b}{2a}$, entonces, determinar el vértice de la parábola de (ε_2), atendiendo únicamente a la denominación algebraica de sus coeficientes, $aqx^2 + b(q+d)x + c(q+2d) = y$, donde $x_v = \frac{-b(q+d)}{2aq}$. Ya tenemos la abscisa, falta determinar el valor de la ordenada. Conociendo el valor de abscisas del vértice, sustituir en la fórmula de la ecuación

$x_v = \frac{-b(q+d)}{2aq}$ y $y_v = aqx_v^2 + +b(q+d)x_v + c(q+2d))$

$$y_v = aq.\frac{b^2(q+d)^2}{4a^2q^2} + b.(q+d).\frac{-b(q+d)}{2aq} + c.(q+2d)$$

$$= \frac{-q^2(-4ac+b^2)-2qd(-4ac+b^2)-b^2d^2}{4aq}$$

como $b^2 - 4ac = 0$ entonces $b^2 = 4ac$ donde $c = \frac{b^2}{4a}$, luego queda $y_v = \frac{-cd^2}{q}$. Por tanto, el valor del vértice de (ε_2) es el punto $\left(\frac{-b(q+d)}{2aq}, \frac{-cd^2}{q}\right)$, ya conocemos, el vértice de ambas funciones.

GENERACIÓN DE OTRAS SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Se pide encontrar ciertas coherencias en los parámetros de la ecuación, dar respuesta a la pregunta: ¿Cuál es la relación entre las posiciones de las parábolas (γ_1) y (γ_2) una vez representadas en un sistema de ejes coordenadas? La cuestión se aclara, cuando hay una especie de clasificación de las posibles (γ_2) según los valores que adopten q y d, al parecer nos llevará a posibles posiciones de la parábola en el plano, . Sea,

$$ax^2 + bx + c = y \qquad (\gamma_1)$$

$$aqx^2 + b(q+d)x + c(q+2d) = y \qquad (\gamma_2)$$

tenemos en cuenta los valores de q.

(a) Dos vértices comunes: Si $q \neq 0$, $q \neq 1$ y $d \neq 0$. En (γ_1) y (γ_2) se tiene

$$ax^2 + bx + c = aqx^2 + b(q+d)x + c(q+2d)$$

$$ax^2(1-q) + bx[1-(q+d)] + c[1-(q+2d)] = 0$$

donde *x* se encuentra por

$$x = \frac{-b\left[1-(q+d)\right] \pm \sqrt{b^2[1-(q+d)]^2 - 4ac(1-q)[1-(q+2d)]}}{2a(1-q)}$$

$$x = \frac{-b[1-(q+d)] \pm bd}{2a(1-q)}.$$

Conclusión: existe dos puntos en común entre (γ_1) y (γ_2), siendo uno de ellos el vértice de la parábola dado por (γ_1), y es $x_1 = \frac{-b}{2a}$; $x_2 = \frac{-b[1-(q+2d)]}{2a(1-q)}$.

(b) Un punto en común: Si $q = 1$ y $d \neq 0$, las funciones (γ_1) y (γ_2) se transforman a

$y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + b(d+1)x + c(2d+1)$

igualando

$ax^2 + bx + c = ax^2 + b(d+1)x + c(2d+1)$

$-bdx = 2cd$

de donde $x = \frac{-2c}{b}$.

Conclusión: entonces solo hay un punto en común, que es el vértice de la primera de coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$, es decir $x = \frac{-2c}{b} = \frac{-b}{2a}$.

(c) Parábola y recta: Si $q = 0$ y $d \neq 0$, las ecuaciones (γ_1) y (γ_2) se reducen a las formas

$y = ax^2 + bx + c$

$y = bdx + 2cd$

igualando

$ax^2 + bx + c = bdx + 2cd$

$ax^2 + b(1-d)x + c(1-2d) = 0$

las raíces son

$x = \frac{-b(1-d) \pm \sqrt{b^2(1-d)^2 - 4ac(1-2d)}}{2a} = \frac{-b(1-d) \pm bd}{2a}$.

Conclusión: hay dos raíces: $x_1 = \frac{-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-b(1-2d)}{2}$, en este caso la función (γ_2) es una recta y tiene dos puntos de contactos con la parábola (γ_1).

(d) Cruce en sus vértices: Si $q = -1$ y $d \neq 0$, las funciones (γ_1) y (γ_2) se expresan como

$y = ax^2 + bx + c$

$y = -ax^2 + bx(d-1) + c(2d-1)$

igualando y

$ax^2 + bx + c = -ax^2 + b(d-1)x + c(2d-1)$

$2ax^2 + b(2-d)x + c(2-2d) = 0$

las raíces

$x = \frac{-b(2-d) \pm \sqrt{b^2(4-4d+d^2) - 8ac(2-2d)}}{4a} = \frac{-b(2-d) \pm bd}{4a}$

donde las dos raíces son $x_1 = \frac{-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-b(1-d)}{2a}$.

Conclusión: Los puntos de cruce entre las dos parábolas son sus vértices respectivos.

(e) Punto común en sus vértices: Si $d = 0$ y $q \neq 1$, las funciones dadas en (γ_1) y (γ_2) se escriben como

$y = ax^2 + bx + c$

$y = aqx^2 + bqx + cq$

igualando *y*

$ax^2 + bx + c = aqx^2 + bqx + cq$

$ax^2(1 - q) + bx(1 - q) + c(1 - q) = 0$

en $ax^2 + bx + c = 0$ sus raíces son $x = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Conclusión: tiene un punto en común que coincide con el vértice de la primera.

(f) Las parábolas coinciden: Si $q = 1$ y $d = 0$, las funciones (γ_1) y (γ_2) se expresan como

$y = ax^2 + bx + c, \quad y = ax^2 + bx + c$

entonces $ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$.

Conclusión: las parábolas coinciden, y tienen en común todos sus puntos.

4. CONSIDERACIONES FINALES

El intercambio de coeficientes en las ecuaciones, generan relaciones notables e interesantes que inducen a explorar otras relaciones existentes, los resultados obtenidos, en su mayoría presentan curiosidades para el estudiante del nivel medio, aplicables a situaciones en las que intervienen ecuaciones o funciones cuadráticas. Queda abierta otras pesquisas que podría involucrar a progresiones geométricas, incluso a ecuaciones o funciones cúbicas y determinar una razón lógica asociado a la Regla de Hudde.

Por último, el tema concede un lugar importante de reflexión a la hora de que el estudiante tenga que apropiarse del conocimiento, y establecer un nivel significativo de aprendizaje con sus propias herramientas, aunque la tarea del profesor es estimular el pensamiento crítico y abstracción, propiciando el cuestionamiento permanente sobre cualquier cosa.

5. REFERENCIAS

Artigue, M.; Donady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericana, S.A.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. España: Ediciones Akal.

Borbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Editorial Alianza Universidad, Madrid.

Boyer, C.B. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial. S.A.

Castro, M. (2019). *Pensamiento crítico en los estudiantes de la Facultad de Ingeniería en industria alimentaria de la Universidad Nacional del Centro del Perú-Huancayo*. Tesis de maestría-Universidad Nacional del Centro del Perú, Huancayo, Perú.

Collette, J. (1993) Historia de la Matemática II. Madrid: Ed. Siglo XXI.

Contreras, A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2004). *Una perspectiva didáctica entorno a los conceptos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo*. Educación Matemática, 16, (1), pp. 59-97.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstractión in advanced mathematical thenking*. Dordrech: kluwer Academic Publishers.

Gavurin, M. K. (1973). *Conferencias sobre los métodos de los cálculos*. Editorial Mir Moscú, URSS.

Gonzales Urbaneja, P. M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII*. Alianza Editorial, Madrid.

Grattan-Guiness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial, Madrid.

Herstein, I. N. (1970). *Álgebra moderna*. Biblioteca de matemática superior, México.

Sierra, M. (2000). *El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza*. Números, 43-44.

Stewart James. (2000). *Cálculo Trascendentes Tempranas. Internacional* Thomson Editores, S.A.

Tucker, T.W. (1991). Priming the calculus Pump: *Innovations and Resources*. MAA, Series Notas N° 17.

Vinagradov, I. (1977). *Fundamentos de la Teoría de los Números*. Editorial Mir Moscú, URSS.

Vizmanos, J. R. & Anzola, M. (1990). *Matemáticas: Algoritmos 3*. Editorial SM, Madrid.